

Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab

Matematisk-fysiske Meddelelser, bind **26**, nr. 9

---

Dan. Mat. Fys. Medd. **26**, no. 9 (1951)

---

ÜBER ZYKLOIDALE  
KURVEN IN DER EBENE UND  
IM RAUM

VON

FR. FABRICIUS-BJERRE



København

I kommission hos Ejnar Munksgaard

1951

## INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
EINLEITUNG .....	3
1. KAPITEL. <i>Ebene zyklonale Kurven</i> .....	4
§ 1. Die Differentialgleichung der zyklonalen Kurven .....	4
§ 2. Evolute und Evolvente .....	10
§ 3. Ein ähnlich veränderliches Punktsystem, das mit einer zyklonalen Kurve und ihrer Evolute verknüpft ist .....	12
§ 4. Der Radiusvektor als Funktion der Bogenlänge .....	23
§ 5. Berührungspunktkurven und Fusspunktkurven. Polare Kurven	28
§ 6. Nichteuklidische Deutung der zyklonalen Kurven und ihrer polaren Kurven .....	33
2. KAPITEL. <i>Zyklonale Raumkurven</i> .....	36
§ 7. Einführung der zyklonalen Raumkurven .....	36
§ 8. Hauptformen der zyklonalen Raumkurven .....	40
§ 9. Polyzyklonale Kurven .....	46
§ 10. Polyzyklonale Kurven auf einem Cartesischen Ovaloid .....	51
§ 11. Polyzyklonale Kurven auf einer Kugel .....	57
§ 12. Polyzyklonale Böschungslinien .....	60
§ 13. Ebene zyklonale Kurven als Spezialfälle polyzyklonaler Raum- kurven .....	68
§ 14. Die der Kreisevolvente und der gemeinen Zyklone entsprechenden polyzyklonalen Raumkurven .....	71
Litteraturverzeichnis .....	74

## EINLEITUNG

**E**inige Zeit vor seinem Tode überliess mir Professor J. HJELMSLEV einige ältere Manuskripte, die einerseits eine geometrische Charakterisierung sämtlicher zykloldal Kurven, andererseits einige bisher unbekannt Sätze über diese Kurven enthalten. Die geometrische Charakterisierung, die beinahe mit der Differentialgleichung der Kurven gleichbedeutend ist, gestattet eine gemeinsame Untersuchung der Zykloiden und Pseudozykloiden, in der die Erzeugung der Zykloiden durch Rollen in den Hintergrund tritt, und in der man zugleich bei den Pseudozykloiden die Verwendung des »Rollens« komplexer Kreise vermeidet. Die Charakterisierung kann ausserdem auf den Raum übertragen werden, wobei man auf eine Klasse von Kurven mit der Haupteigenschaft geführt wird, dass die Kurve beim Abwickeln des Kegels, der sie mit einem gegebenen Punkt im Raume verbindet, in eine ebene zykloidale Kurve übergeht. Diese Kurven heissen daher zykloidale Raumkurven.

Professor Hjelmslev schlug mir gleichzeitig vor, die genannte allgemeine Charakterisierung zum Ausgangspunkt einer Darstellung der Theorie der ebenen und räumlichen zykloidal Kurven zu machen und dadurch eine Verbindung zwischen den vielen Einzeluntersuchungen, die auf diesem Gebiete vorliegen, herzustellen, und, soweit es möglich ist, einem Überblick über diese zu gewinnen. In der vorliegenden Arbeit habe ich versucht eine solche Darstellung zu geben.

Im ersten Kapitel (§§ 1—6) werden die ebenen zykloidal Kurven behandelt. Die genannte Charakterisierung wird formuliert, und mit Hilfe der Stützfunktionen der Kurven werden die einzelnen Typen gekennzeichnet. Danach werden die Evoluten und Evolventen und im Zusammenhang damit das ähnlich veränderliche System von Punkten und Linien untersucht, das mit

einer Zykloide und ihrer Evolute verknüpft ist. Dann wird die Relation zwischen dem Radiusvektor und der Bogenlänge gewonnen, und in den folgenden Paragraphen werden die Polaren der zyklroidalen Kurven, die sogenannten Ährenkurven sowie Kurven, die in anderer Weise mit den zyklroidalen Kurven verknüpft sind, untersucht. Schliesslich werden diese verschiedenen Kurven zu einer passend gewählten nichteuklidischen Metrik in Verbindung gesetzt.

Im 2. Kapitel (§§ 7—14) werden die zyklroidalen Raumkurven untersucht und ihre Hauptformen aufgestellt. Von besonderem Interesse sind hier die sogenannten polyzyklroidalen Raumkurven, das sind Kurven, deren sämtliche Abwicklungen (im oben geschilderten Sinne) von den Punkten einer Geraden aus ebene zyklroidale Kurven sind. Zu dieser Kurvenklasse gehören u. a. die polykonischen Loxodromen und diejenigen Böschungslinien auf einer Rotationsfläche 2. Grades, deren Tangenten einen festen Winkel mit der Achse bilden. Es wird eine Übersicht über die verschiedenen polyzyklroidalen Kurven gegeben und jeder einzelne Typus wird näher untersucht.

Sowohl was die ebenen als auch was die räumlichen zyklroidalen Kurven betrifft, sind viele der gewonnenen Resultate wohl bekannt. Der gemeinsame Ausgangspunkt, von dem aus alle diese Kurven hier behandelt werden, dürfte aber neues Licht auf den Zusammenhang zwischen ihren Eigenschaften werfen.

## 1. KAPITEL

### *Ebene zyklroidale Kurven.*

#### **§ 1. Die Differentialgleichung der zyklroidalen Kurven.**

Es bezeichne  $h$  einen festen Kreis mit dem Mittelpunkt  $O$ . Ferner sei  $\gamma$  ein rollender Kreis und  $P$  einer seiner Punkte. Wenn  $\gamma$  auf  $h$  rollt, beschreibt  $P$  eine Hypo- oder Epizykloide mit Spitzen auf  $h$  und Scheiteln auf einem zu  $h$  konzentrischen Kreis  $g$ . (In Fig. 1 ist angenommen, dass  $P$  eine Epizykloide durchläuft.) Wenn  $P_1$  und  $N_1$  die Berührungspunkte von  $\gamma$  mit  $g$  bzw.  $h$  bezeichnen, sind die Geraden  $PP_1$  (oder  $p$ ) und  $PN_1$  (oder  $n$ ) Tangente bzw. Normale der Zykloide im Punkte  $P$ . Die Tangente  $p$  schneidet  $g$  in einem weiteren Punkt  $P_2$ , und



Die Gleichung (1,3) kann als geometrische Differentialgleichung für die Zykloide  $k$  angesehen werden, wobei  $\mu > 1$  und  $1 > \mu > 0$  der Hypo- bzw. Epizykloide entsprechen. Die Gleichung kann leicht als eine gewöhnliche Differentialgleichung in rechtwinkligen Koordinaten geschrieben werden (vgl. S. 23).

Wir wollen nun die umgekehrte Aufgabe betrachten. Eine Kurve  $k$  habe im Punkte  $P$  die Tangente  $p$  und es sei  $M$  die Projektion eines festen Punktes  $O$  der Ebene auf  $p$ . Wir wollen die Kurve  $k$  bestimmen, für welche zwischen den Strecken  $MP$  und  $OM$  eine Relation der Form (1,3) besteht, wobei wir uns jedoch nicht auf den Fall beschränken, wo  $\mu$  und  $\alpha$  positiv sind, sondern alle Vorzeichenkombinationen in betracht ziehen. Falls  $\mu$  positiv ist, kann  $\alpha$  jedoch nicht negativ oder 0 sein. Ist dagegen  $\mu$  negativ, so kann  $\alpha$  sowohl positiv wie negativ oder 0 sein. Ist speziell  $\mu = 0$ , so erhält man aus (1,1), dass  $f = -1$  ist, und die Integralkurven sind Kreise mit dem Mittelpunkt  $O$ . Von diesem Fall sehen wir im folgenden ab. Ferner wird der Fall  $\mu = 1$  ausgeschlossen.

Der Kreis  $g$  mit dem Mittelpunkt  $O$ , dessen Radius das Quadrat  $\alpha$  hat, wird der Grundkreis genannt. Der zu  $g$  konzentrische Kreis, dessen Radius das Quadrat  $\mu\alpha$  hat, wird wie oben mit  $h$  bezeichnet. Jeder dieser Kreise kann imaginär oder ein Nullkreis sein. Der Punkt  $O$  wird der zur Kurve gehörende Pol genannt.

Um die Integralkurven von (1,3) zu bestimmen, bemerken wir, dass die Strecke  $OM$  gleich der Stützfunktion  $h(\theta)$  der Kurve ist, wobei  $\theta$  der Winkel zwischen einer festen  $X$ -Achse und der Geraden  $OM$  ist (Fig. 2). Hieraus folgt bekanntlich  $MP = h'(\theta)$ . Führt man ein Koordinatensystem mit  $O$  als Ursprung und den Vektoren  $e = (\cos \theta, \sin \theta)$  auf der Geraden  $OM$  und  $\mathfrak{f} = e' = (-\sin \theta, \cos \theta)$  als Grundvektoren ein, so hat man

$$(1,4) \quad \vec{OM} = h(\theta)e, \quad \vec{MP} = h'(\theta)\mathfrak{f},$$

und man erhält daher, wenn  $h(\theta)$  bestimmt ist, die Parameterdarstellung

$$(1,5) \quad \vec{OP} = h(\theta)e + h'(\theta)\mathfrak{f}$$

für die Kurve  $k$ .

Um  $h(\theta)$  zu finden, setzt man die angegebenen Ausdrücke für  $MP$  und  $OM$  in (1,3) ein, was

$$(1,6) \quad h'(\theta)^2 + \mu h(\theta)^2 = \mu\alpha$$

ergibt, woraus man durch Differentiation

$$(1,7) \quad h''(\theta) + \mu h(\theta) = 0$$

erhält, wobei  $h'(\theta)$  weggekürzt ist. Man kann nun (1,6) unmittelbar integrieren, indem man  $\mu = \pm m^2$ ,  $\alpha = \pm a^2$  setzt, je nach-

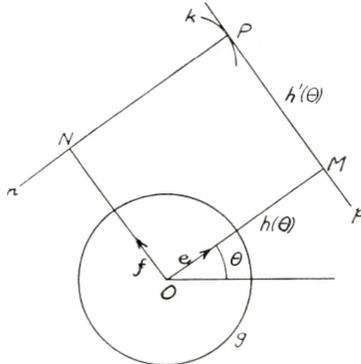


Fig. 2.

dem  $\mu$  bzw.  $\alpha$  positiv oder negativ sind. Die Zahlen  $m$  und  $a$  werden als positiv angenommen, insbesondere kann doch  $a = 0$  sein. Die sich ergebenden Möglichkeiten sind<sup>1</sup>

$$(1,8) \quad h(\theta) = \begin{cases} a \cos(m\theta + c), & \mu > 0, \alpha > 0 \text{ (Hypo- und Epizykloiden, } \mu \geq 1) \\ a \cosh(m\theta + c), & \mu < 0, \alpha > 0 \text{ (Hyperzykloiden)} \\ a \sinh(m\theta + c), & \mu < 0, \alpha < 0 \text{ (Parazykloiden)} \\ e^{\pm m\theta + c}, & \mu < 0, \alpha = 0 \text{ (Logarithmische Spirale)}. \end{cases}$$

Als Integralkurven von (1,3) haben wir also die eigentlichen Zykloiden (Hypo- und Epizykloiden), die Pseudozykloiden (Hyper- und Parazykloiden) und die logarithmische Spirale gefunden. Die beiden letzten Kurvengruppen werden zusammenfassend als uneigentliche Zykloiden bezeichnet. Jede Kurve

<sup>1</sup> Vgl. z. B. WÖLFFING [1] und [2].

ist durch das Zahlenpaar  $(\mu, \alpha)$  (und den Pol  $O$ ) charakterisiert. Zwei Kurven mit dem gleichen Zahlenpaar sind kongruent, zwei Kurven mit gleichem Modul  $\mu$ , aber verschiedenen Werten von  $\alpha$  sind ähnlich, wenn diese beiden Werte das gleiche Vorzeichen haben. Anderenfalls werden sie uneigentlich (oder komplex) ähnlich genannt.

Sämtliche Integralkurven entstehen offenbar aus einer durch Drehung um den Pol  $O$ , wobei man jedoch bei den Spiralen die Spiegelung an einer Geraden durch  $O$  hinzuzufügen hat. Eine solche Rotationsschar wird auch durch das Zahlenpaar  $(\mu, \alpha)$  bezeichnet. Was die einzelnen Kurven betrifft, sei folgendes bemerkt.

Bei den eigentlichen Zykloiden sind beide Kreise  $g$  und  $h$  reell, und die Kurven liegen in dem von  $g$  und  $h$  begrenzten Kreisring. Bei einer Hypo(Epi)zykloide liegt  $h$  ausserhalb (innerhalb)  $g$ , der Punkt  $P$  liegt ausserhalb (auf) der Sehne  $P_1P_2$ , und das Verhältnis  $f$  ist positiv (negativ).

Bei einer Hyperzykloide ist der Kreis  $g$  reell, der Kreis  $h$  imaginär. Man zeigt leicht, dass die Hyperzykloide einen Scheitel  $P_0$  auf  $g$  hat, zur Geraden  $OP_0$  symmetrisch ist, und dass die von  $P_0$  ausgehenden Zweige  $g$  in immer grösser werdenden Windungen spiralförmig umkreisen.

Bei einer Parazykloide ist der Kreis  $g$  imaginär, der Kreis  $h$  reell. Man weist leicht nach, dass die Parazykloide eine Spitze  $P_0$  auf  $h$  hat, symmetrisch zur Spitzentangente  $OP_0$  ist, und dass die von  $P_0$  ausgehenden Zweige  $h$  in immer grösser werdenden Windungen spiralförmig umkreisen.

Bei der logarithmischen Spirale ist der charakteristische Winkel  $v$  durch  $\cot v = \pm m$  bestimmt. Dies ergibt sich auch unmittelbar aus der Gleichung (1,3), da für  $\alpha = 0$  aus der Gleichung folgt, dass die Kurventangente den Radiusvektor unter einem durch  $\cot v = \pm \sqrt{-\mu}$  bestimmten konstanten Winkel schneidet. Die Kreise  $g$  und  $h$  sind beide Nullkreise.

Ebenso wie bei den eigentlichen Zykloiden ziehen wir bei den uneigentlichen die Schnittpunkte  $P_1$  und  $P_2$  einer variablen Tangente  $p$  mit dem Berührungspunkt  $P$  und dem Grundkreis  $g$  in betracht. Da der Modul  $\mu$  hier negativ ist, werden diese Punkte imaginär. Bei der Hyperzykloide verläuft die Tangente  $p$  ausserhalb des Grundkreises. In den anderen Fällen hat der Grund-

kreis einen oder keinen reellen Punkt. Die Gleichung (1,3) ist gleichbedeutend mit (1,1), die besagt, dass das Verhältnis  $MP/MP_1$  konstant ist, dieses wiederum ist auch in diesem Fall gleichbedeutend damit, dass das Verhältnis  $PP_1/PP_2$  konstant bleibt, wenn  $P$  die Kurve durchläuft.

Wir haben somit die folgende — von J. HJELMSLEV stammende — Charakterisierung der zyklroidalen Kurven gefunden:

**Satz 1,1.** *Jede der betrachteten zyklroidalen Kurven ist dadurch charakterisiert, dass die Tangente  $p$  in einem beliebigen Punkt  $P$  der Kurve einen festen Kreis  $g$  in zwei reellen oder imaginären Punkten derart schneidet, dass das Verhältnis  $PP_1/PP_2$  konstant bleibt, wenn  $P$  die Kurve durchläuft.*

Bei einer uneigentlichen Zyклоide, wo  $\mu$  negativ, also  $f$  imaginär ist, findet man für  $f$ , indem man  $\cot v = m$  setzt, die Werte  $f = e^{\pm 2iv}$ .

Es sollen noch einige Folgerungen aus der Gleichung (1,3) gezogen werden. Es bezeichne  $N$  die Projektion von  $O$  auf die Normalen an  $k$  im Punkte  $P$  (Fig. 2). Dann ist  $ON = MP$  und  $NP = OM$ ; daher kann man (1,3) in der Form

$$(1,9) \quad NP^2 + \mu^{-1}ON^2 = \mu^{-1}(\mu\alpha)$$

schreiben. Diese Gleichung, die dieselbe Form wie (1,3) hat, zeigt, dass die Normale  $n$  den Kreis  $h$  (dessen Radius das Quadrat  $\mu\alpha$  hat) in Punkten  $N_1$  und  $N_2$  so schneidet, dass das Verhältnis  $PN_1/PN_2$  konstant bleibt, wenn  $P$  die Kurve  $k$  durchläuft. Indem  $\mu$  hier in (1,3) durch  $\mu^{-1}$  ersetzt ist, hat nach einer auf S. 5 gemachten Bemerkung das Verhältnis  $PN_1/PN_2$  den Wert  $-f$ . Da ferner (1,3) umgekehrt eine Folge von (1,9) ist, gilt

**Satz 1,2.** *Jede der betrachteten zyklroidalen Kurven ist dadurch charakterisiert, dass die Normale in einem Punkt  $P$  der Kurve einen Kreis  $h$  in Punkten  $N_1$  und  $N_2$  so schneidet, dass das Verhältnis  $PN_1/PN_2$  konstant bleibt, wenn  $P$  die Kurve durchläuft.*

Wir bemerken, dass hier auch die Kreisevolvente einbegriffen werden kann; hier berührt die Normale  $n$  den Kreis  $h$ , so dass also  $PN_1/PN_2 = 1$  ist.

Aus Gleichung (1,9) geht hervor, dass die orthogonalen Trajektorien der Integralkurven von (1,3) eine weitere Rotationsschar von zyklodalen Kurven mit demselben Pol  $O$  bilden; die entsprechenden Zahlen  $\mu^*$  und  $\alpha^*$  sind

$$\mu^* = \mu^{-1}, \quad \alpha^* = \mu\alpha$$

oder

$$\alpha^* = \mu\alpha, \quad \alpha = \mu^*\alpha^*$$

was besagt, dass die Kreise  $g$  und  $h$  bei Übergang von einer Rotationsschar zyklodaler Kurven zu der der orthogonalen Trajektorien mit einander vertauscht werden. Wir haben also

**Satz 1,3.** *Die orthogonalen Trajektorien einer Rotationsschar  $(\mu, \alpha)$  von zyklodalen Kurven bilden wieder eine Rotationsschar  $(\mu^{-1}, \mu\alpha)$  solcher Kurven. Bei Übergang zur Orthogonalschar werden die Kreise  $g$  und  $h$  vertauscht.*

Einer Rotationsschar von Hypo(Hyper)zykloiden entspricht eine Orthogonalschar, die aus Epi(Para)zykloiden besteht, den logarithmischen Spiralen entsprechen wieder logarithmische Spiralen. Für die eigentlichen Zykloiden und die Spiralen ist der Satz einleuchtend.

In den folgenden Paragraphen werden wir die zyklodalen Kurven mit Hilfe ihrer gemeinsamen Differentialgleichung (1,3) gleichzeitig untersuchen. Hierbei sind nur die Kreisevolventen und die gemeinen Zykloiden auszunehmen, die erst später (§ 4) in die Untersuchung einbezogen werden.

## § 2. Evolute und Evolvente.

Wir betrachten eine durch die Zahlen  $(\mu, \alpha)$  bestimmte zyklodale Kurve  $k$  mit dem Pol  $O$ . Die Tangente  $p$  im Punkte  $P$  schneide den Grundkreis  $g$  in den reellen oder imaginären Punkten  $P_1$  und  $P_2$ ; es sei  $P'$  der Punkt auf  $p$ , der in bezug auf  $g$  zu  $P$  konjugiert ist. Da das Verhältnis  $PP_1/PP_2$  konstant gleich  $f$  ist, bleiben die Abstandsverhältnisse der Punkte  $P, P', P_1, P_2$  konstant bei der Bewegung von  $P$  auf  $k$  (die Punkte bilden ein ähnlich veränderliches System). Die Richtungen der Tangenten an die von den Punkten beschriebenen Kurven sind zu

der Punktgruppe projektiv, in unserem Fall also harmonisch. Da nun  $p$  Tangente in  $P$  an  $k$  ist, während  $P_1$  und  $P_2$  den Kreis  $g$  durchlaufen, dessen Tangenten denselben (reellen oder imaginären) Winkel mit  $p$  bilden, muss die Tangente in  $P'$  an die von  $P'$  beschriebene Kurve  $k'$  auf  $p$  senkrecht stehen, d. h.  $k'$  ist eine Evolvente von  $k$ . Das kann natürlich auch leicht durch Rechnung nachgewiesen werden.

Da das Verhältnis  $P'P_1/P'P_2$  konstant ist, muss die Kurve  $k'$  nach Satz 1,2 zykloldal sein. Der zugehörige  $h$ -Kreis ist der Kreis  $g$ , und da  $P'P_1/P'P_2 = -f$ , hat auch  $k'$  den Modul  $\mu$ . Das Quadrat des Radius des Grundkreises von  $k'$  ist  $\mu^{-1}\alpha$ , und die Kurve  $k'$  ist durch die Zahlen  $(\mu, \mu^{-1}\alpha)$  charakterisiert. Es gilt also

**Satz 2,1.** *Der Punkt  $P'$ , der auf der Tangente  $p$  einer zykloldal Kurve  $k$  zum Berührungspunkt  $P$  in bezug auf den Grundkreis  $g$  konjugiert ist, beschreibt eine Evolvente von  $k$ . Diese Evolvente ist wieder eine zyklodale Kurve, die durch die Zahlen  $(\mu, \mu^{-1}\alpha)$  bestimmt ist.*

Die Kurve  $k'$  heisst die zyklodale Evolvente von  $k$ . Man kann nachweisen, dass keine andre Evolvente von  $k$  zykloldal ist. Fällt  $P$  auf den Grundkreis  $g$ , also in einen Scheitel von  $k$ , so fällt  $P'$  mit  $P$  zusammen und  $k'$  ist daher diejenige Evolvente, deren Ausgangspunkt ein Scheitel von  $k$  ist (vorausgesetzt, dass ein solcher existiert).

Aus dem obigen geht ferner unmittelbar hervor, dass die Evolute einer zykloldal Kurve wieder eine zyklodale Kurve ist, und Satz 2,1 ergibt

**Satz 2,2.** *Der Punkt  $P''$ , der auf der Normalen einer zykloldal Kurve  $k$  zum Fusspunkt  $P$  in bezug auf den Kreis  $h$  konjugiert ist, beschreibt die Evolute von  $k$ . Diese ist wieder eine zyklodale Kurve, die durch die Zahlen  $(\mu, \mu\alpha)$  bestimmt ist.*

Ist  $k$  eine eigentliche Zyklode, so sind die zyklodale Evolvente  $k'$  und die Evolute  $k''$  zu  $k$  ähnlich. Bei einer Hyper(Para)-zyklode sind sowohl  $k'$  als auch  $k''$  Para(Hypo)zykloden, die unter einander im Verhältnis  $\mu$  ähnlich sind. Ist  $k$  eine logarithmische Spirale, so sind auch  $k'$  und  $k''$  logarithmische Spiralen. In diesem Fall sieht man jede der Strecken  $PP'$  und  $PP''$  von  $O$  aus unter rechtem Winkel. In einem allgemeinen Satz auf

S. 15 ist enthalten, dass  $k''$  aus  $k'$  durch Multiplikation mit  $\mu$  von  $O$  aus erhalten werden kann.

Wir haben in Satz 1,3 gesehen, dass die orthogonalen Trajektorien einer Rotationsschar  $(\mu, \alpha)$  von zyklroidalen Kurven wieder eine solche Schar mit den Zahlen  $(\mu^{-1}, \mu\alpha)$  bilden. Die zyklroidalen Evolventen der ersten Schar bilden eine Rotationsschar  $(\mu, \mu^{-1}\alpha)$  und die Evoluten der anderen Schar eine Rotationsschar  $(\mu^{-1}, \alpha)$ . Diese beiden Scharen müssen aber nach Satz 1,3 zu einander orthogonal sein. Es gilt also

**Satz 2,3.** *Sind zwei Rotationsscharen von zyklroidalen Kurven zu einander orthogonal, so ist die Evolutenschar der einen orthogonal zur Schar der zyklroidalen Evolventen der anderen.*

Wir werden später (S. 70) sehen, wie solche Systeme zyklroidaler Kurven durch räumliche Konstruktion erzeugt werden können.

### § 3. Ein ähnlich veränderliches Punktsystem, das mit einer zyklroidalen Kurve und ihrer Evolute verknüpft ist<sup>1</sup>.

Bei den Bewegungen eines ähnlich-veränderlichen Systems verändert das System nur seine Grösse, nicht seine Form, d. h. die Winkel sowie die Verhältnisse der Abstände sind unveränderlich. Schreibt man die gleichzeitige Bewegung zweier willkürlicher Punkte eines ebenen Systems vor, so ist die Bewegung des ganzen Systems festgelegt. Im folgenden untersuchen wir ein System  $\Sigma$ , das einer zyklroidalen Kurve und ihrer Evolute zugeordnet ist.

Unter Beibehaltung der Bezeichnungen des vorigen Paragraphen sei  $k'$  die zyklroidale Kurve, deren Evolute dann die Kurve  $k$  ist. Zusammengehörige Punkte sollen dann  $P'$  auf  $k'$  und der zu  $P'$  gehörige Krümmungsmittelpunkt  $P$  auf  $k$  sein. Zu dem System  $\Sigma$  gehören ausser  $P$  und  $P'$  die beiden (reellen oder imaginären) Punkte  $P_1$  und  $P_2$ , in denen die Gerade  $p$  den Grundkreis  $g$  von  $k$  schneidet, sowie die stets reelle Projektion  $M$  des Pols  $O$  auf die Tangente  $p$  (also der Mittelpunkt von  $P_1 P_2$ ). Ein beliebiger Punkt  $T$  von  $p$ , der zu  $\Sigma$  gehört, kann dann durch

$$(3,1) \quad MT = \lambda MP$$

<sup>1</sup> Vgl. BLASCHKE [1] und WUNDERLICH [1].

bestimmt werden, wobei  $\lambda$  eine Konstante ist. Wegen  $MP = h'(\theta)$  gibt die Funktion  $h'(\theta)$  die Variation der Grösse des Systems  $\Sigma$  an. Eine beliebige Gerade in  $\Sigma$ , die  $p$  in einem Punkt  $T$  schneidet, bildet mit  $p$  einen konstanten Winkel. Ist sie zu  $p$  parallel, so ist ihr Abstand von  $p$  zu  $h'(\theta)$  proportional. — Im folgenden wollen wir u. a. die Kurven bestimmen, die von den Geraden des Systems eingehüllt werden, sowie diejenigen, die von den Punkten des Systems beschrieben werden.

Vorbereitend bemerken wir folgendes. Es sei  $h(\theta)$  die Stützfunktion einer zyklodialen Kurve, die durch einen der Ausdrücke (1,8) bestimmt ist. Eine Linearkombination von  $h(\theta)$  und  $h'(\theta)$  ist dann wieder Stützfunktion einer zyklodialen Kurve, und zwar mit demselben Modul. Sind umgekehrt zwei zyklodiale Kurven mit demselben Modul und den Stützfunktionen  $h(\theta)$  und  $h_1(\theta)$  gegeben, so kann  $h_1(\theta)$  als Linearkombination von  $h(\theta)$  und  $h'(\theta)$  dargestellt werden. Beide Behauptungen folgen unmittelbar aus den Additionstheoremen für die trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen. Wir erinnern daran, dass eine zyklodiale Kurve mit negativem Modul eine Hyper- oder Parazykloide oder eine logarithmische Spirale sein kann, je nach dem Vorzeichen des Quadrates des Radius des Grundkreises (s. S. 7), während eigentlich zyklodiale Kurven mit demselben positiven Modul zu einander ähnlich sind.

Für die Geraden des Systems beweisen wir

**Satz 3,1.** *Die Geraden des Systems  $\Sigma$  hüllen zyklodiale Kurven mit demselben Modul  $\mu$  und demselben Pol  $O$  wie  $k$  und  $k'$  ein.*

Falls die Gerade  $g$  zu  $p$  parallel ist, hat die von  $g$  eingehüllte Kurve eine Stützfunktion der Form  $h(\theta) + ah'(\theta)$ , wo  $a$  konstant ist, und aus den obigen Bemerkungen folgt daher die Behauptung.

Die Gerade  $g$  schneide nun  $p$  in einem Punkt  $T$  unter dem Winkel  $u$ . Es bezeichne  $N$  die Projektion von  $O$  auf  $g$ , und es sei  $e_u$  ein Einheitsvektor auf der Geraden  $ON$ , dessen Winkel mit dem Einheitsvektor  $e$  auf  $OM$  gleich  $u$  ist (Fig. 3). Wir projizieren den Streckenzug  $OMT$  auf die Gerade  $ON$  und finden mit Hilfe der Formeln (1,4) und (3,1)

$$(3,2) \quad \vec{ON} = (h(\theta) \cos u + \lambda h'(\theta) \sin u) e_u.$$

Da die Stützfunktion  $ON$  der von  $q$  eingehüllten Kurve  $\bar{k}$  somit eine Linearkombination von  $h$  und  $h'$  ist, ist Satz 3,1 bewiesen.

Um nun den Berührungspunkt  $Q$  der Enveloppe mit  $q$  sowie das Quadrat  $\bar{\alpha}$  des Radius des zu  $\bar{k}$  gehörigen Grundkreises  $\bar{g}$  zu bestimmen, differenzieren wir den Faktor von  $e_u$  nach  $\theta$  (vgl.

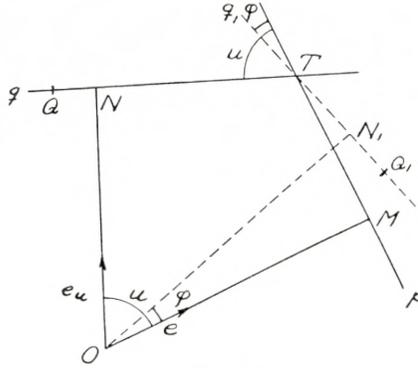


Fig. 3.

die Formeln (1,4)). Benutzen wir nun die Formeln (1,7) und setzen  $e'_u = \bar{f}_u$ , so erhalten wir

$$(3,3) \quad \vec{NQ} = (h'(\theta) \cos u - \lambda \mu h(\theta) \sin u) \bar{f}_u.$$

Bildet man der Gleichung (1,3) entsprechend den Ausdruck  $NQ^2 + \mu ON^2$ , so ergibt sich

$$(3,4) \quad NQ^2 + \mu ON^2 = \mu \bar{\alpha},$$

wo

$$(3,5) \quad \bar{\alpha} = \alpha (\cos^2 u + \lambda^2 \mu \sin^2 u)$$

ist. Die von  $q$  eingehüllte Kurve  $\bar{k}$  hat also den Pol  $O$  und ist durch die Zahlen  $(\mu, \bar{\alpha})$  bestimmt.

Sind  $k$  und  $k'$  eigentliche Zykloiden, so sind alle Kurven  $\bar{k}$  der gegebenen ähnlich. Ist dagegen  $k$  eine Pseudozykloide,  $\mu$  also negativ und  $\alpha \neq 0$ , so hängt die Form von  $\bar{k}$  von dem Vorzeichen von  $\bar{\alpha}$  ab. Speziell kann  $\bar{\alpha} = 0$ , also  $\bar{k}$  eine logarithmische Spirale sein. Sind die gegebenen Kurven  $k$  und  $k'$  logarithmische Spiralen, so sind auch alle Kurven  $\bar{k}$  logarithmische Spiralen.

Setzt man  $\lambda = 1$ , so dass die Gerade  $q$  durch den Punkt  $P$  von  $k$  geht, so sind die Kurven  $\bar{k}$  die sogenannten Evolutoiden von  $k$ . Für diese Kurven gelten also die oben genannten Sätze.

Setzt man  $u = 90^\circ$ , so dass  $q$  senkrecht auf  $p$  steht, so vereinfachen sich die aufgestellten Formeln. Man erhält hier  $e_u = \bar{f}$  und  $\bar{f}_u = -e$  sowie

$$(3,6) \quad \vec{ON} = \lambda h'(\theta) \bar{f}$$

$$(3,7) \quad \vec{NQ} = \lambda \mu h(\theta) e$$

$$(3,8) \quad \bar{\alpha} = \lambda^2 \mu \alpha.$$

Aus (3,6) und (3,7) berechnet man für den Ortsvektor

$$(3,9) \quad \vec{OQ} = \lambda(\mu h(\theta) e + h'(\theta) \bar{f});$$

es ergibt sich also

**Satz 3,2.** *Die auf den Tangenten  $p$  senkrechten Geraden des Systems  $\Sigma$  hüllen zyklonale Kurven ein, die aus einander durch Multiplikation von  $O$  aus hervorgehen.*

Für  $\lambda = 1$  geht die Gerade  $q$  durch  $P$  und hüllt die Evolute  $k''$  von  $k$  ein. Für  $\lambda = \mu^{-1}$  ist nach (3,1)  $MT = \mu^{-1}MP$ , und aus (1,1) folgt  $MT \cdot MP = MP_1^2$ , d. h.  $T$  ist der zu  $P$  in bezug auf  $g$  konjugierte Punkt  $P'$  auf  $p$ . Dieser Punkt ist ferner der Berührungspunkt  $Q$ , da sich aus (3,7)  $\vec{NQ} = h(\theta) e = \vec{OM}$  ergibt. Die Gerade  $q$  durch  $P'$  hüllt also (wie zu erwarten) die Evolvente  $k'$  von  $k$  ein. Aus (3,9) folgt, dass  $k''$  aus  $k$  durch Multiplikation mit  $\mu$  von  $O$  aus erhalten werden kann. Falls  $\lambda = 0$  ist, d. h. wenn  $q$  durch  $M$  geht, reduziert sich die Kurve  $\bar{k}$  auf den Punkt  $O$ .

Wir wenden uns den Kurven zu, die von den Punkten des Systems  $\Sigma$  beschrieben werden, und beginnen mit den Punkten der Geraden  $p$ .

Die Punkte  $P$  und  $P'$  beschreiben die zyklonalen Kurven  $k$  und  $k'$ . Falls der Grundkreis  $g$  von  $k$  reell ist, beschreiben die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  diesen Kreis. Die Bahnkurven der übrigen

Punkte  $T$  auf  $p$  heissen Trochoiden und  $k$  heisst die zu ihnen gehörende Stammzykloide. Man unterscheidet zwischen eigentlichen Trochoiden und Pseudotrochoiden (uneigentlichen Trochoiden), je nachdem ob  $k$  eine eigentliche Zykloide oder eine Pseudozykloide ist. Aus den Formeln (1,5) und (3,1) ergibt sich für die dem Parameterwert  $\lambda$  entsprechende Trochoide  $\tau$  die Parameterdarstellung

$$(3,10) \quad \vec{OT} = h(\theta)e + \lambda h'(\theta)f.$$

Sind  $k$  und  $k'$  logarithmische Spiralen, so zeigt (3,10), dass auch sämtliche Bahnkurven von  $T$  logarithmische Spiralen sind. Von diesem Fall wollen wir im folgenden absehen.

Für  $\lambda = 0$  erhält man eine besondere Klasse von Trochoiden, die sogenannten Rosenkurven (Rhodonnen und Pseudorhodonnen), die von  $M$  beschrieben werden, also Fusspunkt-kurven des Pols  $O$  in bezug auf die zyklroidalen Kurven sind.

Wir wollen zeigen, dass eine eigentliche Trochoide Bahnkurve einer Bewegung ist, bei der die Polkurven Kreise sind. Durch den Punkt  $T$  lege man zu  $OP_1$  und  $OP_2$  parallele Geraden, sodass ein Parallelogramm  $OATB$  abgegrenzt wird, dessen Seiten konstante Längen haben, da  $T$  die Strecke  $P_1P_2$  in konstantem Verhältnis teilt. Wenn  $P$  sich auf der Zykloide  $k$  bewegt, erhalten  $P_1$  und  $P_2$  proportionale Geschwindigkeiten auf dem Kreis  $g$ , da  $PP_1/PP_2$  konstant ist. Der Punkt  $T$  ist also vierte Ecke eines Parallelogrammes mit konstanten Seitenlängen, dessen Seiten  $OA$  und  $OB$  sich mit proportionalen Geschwindigkeiten um  $O$  drehen. Bekanntlich beschreibt dann  $T$  die Bahnkurve einer Bewegung, deren Polkurven Kreise sind<sup>1</sup>.

Durchläuft  $T$  die Trochoide  $\tau$ , so hüllt jede durch  $T$  gehende Gerade des Systems  $\Sigma$  eine zyklroidale Kurve ein. Der Punkt  $T$  kann also in unendlich vielen verschiedenen Weisen als Scheitel eines Winkels von konstanter Grösse aufgefasst werden, der sich so bewegt, dass seine Schenkel zwei zyklroidale Kurven mit demselben Modul und demselben Pol einhüllen. Umgekehrt kann man zeigen

<sup>1</sup> S. z. B. WIELEITNER [1], S. 232. Die Trochoiden werden gewöhnlich durch diese Eigenschaft definiert. Bei gleichzeitiger Behandlung der Trochoiden und Pseudotrochoiden ist die oben gegebene Definition vorzuziehen. — Betreffend die Pseudotrochoiden s. WÖLFFING [1].

**Satz 3,3.** *Gleitet ein fester Winkel  $(p, q)$  mit seinen Schenkeln auf zwei zykloldalen Kurven mit demselben Modul und demselben Pol, so beschreibt der Scheitel des Winkels eine Trochoide (Pseudotrochoide).*

Wir betrachten wieder Fig. 3, wo  $OM = h(\theta)$  und  $ON = h_1(\theta)$  die Stützfunktionen der von  $p$  bzw.  $q$  eingehüllten Zykloiden bezeichnen. Da die beiden Zykloiden denselben Modul haben, ist nach einer früheren Bemerkung  $h_1(\theta)$  eine Linearkombination von  $h(\theta)$  und  $h'(\theta)$ , und da  $ON$  die Projektion des Streckenzuges  $OMT$ , und der Winkel  $(p, q)$  konstant ist, ist auch  $MT$  eine solche Linearkombination, also

$$MT = ah(\theta) + bh'(\theta),$$

wo  $a$  und  $b$  konstant sind.

Durch  $T$  legen wir nun eine weitere Gerade  $q_1$ , die mit  $p$  den konstanten Winkel  $\varphi$  bildet. Der Abstand  $ON_1$  von  $O$  nach  $q_1$  ist

$$ON_1 = OM \cos \varphi + MT \sin \varphi = (\cos \varphi + a \sin \varphi)h(\theta) + b \sin \varphi h'(\theta).$$

Hieraus folgt, dass auch die Gerade  $q_1$  eine zykloldale Kurve mit dem Modul  $\mu$  und dem Pol  $O$  einhüllt. Wir haben nun nur  $\varphi$  so zu bestimmen, dass die von  $q_1$  eingehüllte Kurve eine Stammzykloide ist, also so, dass es einer (3,1) entsprechender Gleichung

$$(3,10) \quad N_1T = \lambda_1 N_1Q_1$$

mit konstantem  $\lambda_1$  genügt, wo  $Q_1$  den Berührungspunkt mit  $q_1$  bezeichnet.

Zu diesem Zweck entnehmen wir aus Fig. 3, dass

$$N_1T = -OM \sin \varphi + MT \cos \varphi,$$

also

$$N_1T = (a \cos \varphi - \sin \varphi)h(\theta) + b \cos \varphi h'(\theta)$$

gilt. Wie früher bestimmt man  $N_1Q_1$  durch Differentiation von  $ON_1$  nach  $\theta$  und erhält

$$N_1 Q_1 = -\mu b \sin \varphi h(\theta) + (\cos \varphi + a \sin \varphi) h'(\theta).$$

Die Bedingung für Proportionalität von  $N_1 T$  und  $N_1 Q_1$  ist also

$$\begin{vmatrix} a \cos \varphi - \sin \varphi & b \cos \varphi \\ -\mu b \sin \varphi & \cos \varphi + a \sin \varphi \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$(3,11) \quad 2a \cos 2\varphi + (a^2 + \mu b^2 - 1) \sin 2\varphi = 0.$$

Diese Gleichung hat aber für jeden Wert von  $a$  und  $b$  Lösungen in  $\varphi$ . Damit ist Satz 3,3 bewiesen.

Aus (3,11) ersieht man, dass die Lösungen  $\varphi$  mit der Periode  $\frac{\pi}{2}$  auftreten (falls nicht jeder Wert von  $\varphi$  Lösung ist). Für eine beliebige Trochoide gilt also

**Satz 3,4.** *Eine Trochoide hat im allgemeinen zwei und nur zwei Stammzykloiden. Sie ergibt sich als Bahnkurve des Scheitels eines rechten Winkels, dessen Schenkel auf den beiden Zykloiden gleiten.*

Ein einziger Ausnahmefall tritt ein, nämlich wenn  $a = 0$  und  $b = \sqrt{\mu^{-1}}$ , in welchem Fall (3,11) für jeden Wert von  $\varphi$  erfüllt ist. Man erhält hier

$$MT = \sqrt{\mu^{-1}} h'(\theta) = \sqrt{\mu^{-1}} MP,$$

woraus man mit Hilfe von (1,1) schliesst, dass  $T$  mit einem der Punkte  $P_1$  oder  $P_2$  auf dem hier reellen Grundkreis  $g$  zusammenfällt. Die Trochoide reduziert sich also auf einen Kreis.

Ist  $\varphi$  gefunden, so erhält man  $\lambda_1$  aus (3,10) z. B. als das Verhältnis  $(a \cos \varphi - \sin \varphi) / -\mu b \sin \varphi$ . Wenn  $\lambda_1$  einen der früher genannten speziellen Werte 1,  $\mu^{-1}$  oder 0 annimmt, so reduziert sich die von  $T$  durchlaufene Trochoide auf eine zykloidale Kurve oder eine Rosenkurve.

Falls die in Satz 3,3 genannten zykloidalen Kurven zusammenfallen, wird die von  $T$  durchlaufene Kurve eine isoptische Kurve der Zykloide. Aus Satz 3,3 folgt dann

**Satz 3,5.** *Gleitet ein konstanter Winkel mit seinen Schenkeln auf einer zykloidalen Kurve, so durchläuft sein Scheitel im allgemeinen eine Trochoide (Pseudotrochoide).*

Die isoptische, speziell ortoptische, Kurve einer gegebenen zykloldal Kurve  $k$  besteht dann im allgemeinen aus einer oder mehreren Trochoiden, die doch in Zykloiden oder Rosenkurven entarten können. Ist  $k$  eine eigentliche Zykloide, so kann der Grundkreis  $g$  speziell als »Trochoide« auftreten. Dies tritt ein, wenn  $k$  eine geschlossene (algebraische) Zykloide mit einer ungeraden Anzahl Bögen ist. Dann ist nämlich die Normale in einem Scheitel von  $k$  Tangente in der gegenüberliegende Spitze, und die ortoptische Kurve enthält  $g$ . Speziell gilt dies für Steiners Hypozykloide<sup>1</sup> und für die Kardioide<sup>2</sup>.

Mit Hilfe der aufgestellten Sätze können wir die Kurven angeben, die ein nicht auf  $p$  gelegener Punkt  $S$  in  $\Sigma$  beschreibt. Man verbinde  $S$  mit den Punkten  $P$  und  $P'$ , sodass das Dreieck  $SPP'$  mit konstanten Winkeln entsteht. Nach Satz 3,1 hüllen die Geraden  $SP$  und  $SP'$  zyklodale Kurven mit dem Modul  $\mu$  und dem Pol  $O$  ein, und nach Satz 3,3 durchläuft  $S$  dann eine Trochoide. Liegt  $S$  speziell auf dem Kreis, der  $PP'$  zum Durchmesser hat, so hüllen  $SP$  und  $SP'$  Evolutoiden von  $k$  bzw.  $k'$  ein; da aber  $P$  der zu  $P'$  gehörige Krümmungsmittelpunkt ist, ist  $S$  Berührungspunkt der Enveloppe mit der Geraden  $SP'$ . In diesem Fall durchläuft  $S$  daher eine zyklodale Kurve (die genannte Evolutoide von  $k'$ ). Wir haben also

**Satz 3,6.** *Ein beliebiger Punkt des Systems  $\Sigma$  durchläuft im allgemeinen eine Trochoide. Die Punkte auf dem Kreis, der  $PP'$  zum Durchmesser hat, durchlaufen zyklodale Kurven mit demselben Modul und demselben Pol wie die gegebenen zyklodalen Kurven.*

Wir schliessen diesen Paragraphen mit einer näheren Beschreibung der eingeführten Trochoiden und mit einer Untersuchung der Polkurven sowohl der in Satz 3,5 bestimmten Bewegung eines festen Winkels als auch der des Systems  $\Sigma$  selbst. Dabei ist es bequem, die Trochoide  $\tau$  auf die beiden Stammzykloiden zu beziehen. Die eine sei die Zykloide  $k$ , so dass der Punkt  $T$  von  $\tau$  auf der Tangente im Punkt  $P$  von  $k$  liegt und die Gleichung (3,1) erfüllt ist. Die andere Stammzykloide  $\bar{k}$  wird von

<sup>1</sup> LORIA [1] I, S. 164.

<sup>2</sup> LORIA [1] II, S. 113.

der zu  $p$  senkrechten Geraden  $q$  durch  $T$  eingehüllt. Der Berührungspunkt  $Q$  auf  $q$  ist durch (3,7) und das Quadrat des Radius des zugehörigen Grundkreises  $\bar{g}$  durch (3,8) bestimmt. Zu dem Punkt  $T$  auf  $q$  gehört ein Parameter  $\lambda$ , der durch die zu (3,1) analoge Gleichung

$$(3,12) \quad NT = \bar{\lambda}NQ$$

bestimmt ist. Da  $NT = OM = h(\theta)$  und  $NQ = \lambda\mu h(\theta)$  ergibt sich zwischen  $\lambda$  und  $\bar{\lambda}$  die Relation

$$(3,13) \quad \lambda\bar{\lambda} = \mu^{-1}.$$

Nach (3,9) ist der Berührungspunkt  $Q$  Schnittpunkt von  $q$  und der Geraden  $OP'P''$  (s. Fig. 4). Die Stammzykloide  $\bar{k}$  ist daher homothetisch zur Evolvente  $k'$  und zur Evolute  $k''$  der Zykloide  $k$ .

Falls  $k$  eine eigentliche Zykloide ist, sind  $k$  und  $\bar{k}$  ähnlich. Die Trochoide  $\tau$  heisst dann Hypo- oder Epitrochoide, je nachdem ob  $k$  eine Hypo- oder Epizykloide ist. Ist  $k$  dagegen eine Hyper(Para)zykloide, so ist  $\bar{k}$  eine Para(Hyper)zykloide. Man kann also nur von Pseudotrochoiden sprechen und nicht zwischen Hypo- und Paratrochoiden unterscheiden.

Wir wollen nunmehr die Polkurven der Bewegung des rechten Winkels  $(p, q)$  bestimmen. Der momentane Drehpol  $\bar{O}$  ist der Schnittpunkt der Normalen von  $p$  in  $P$  und von  $q$  in  $Q$  (Fig. 4). Wir erhalten also

$$\vec{O\bar{O}} = \vec{NQ} + \vec{MP} = \lambda\mu h(\theta)\mathbf{e} + h'(\theta)\mathbf{f}$$

oder, wenn wir (3,13) benutzen,

$$\vec{O\bar{O}} = \lambda\mu(h(\theta)\mathbf{e} + \bar{\lambda}h'(\theta)\mathbf{f}).$$

Die feste Polkurve bei dieser Bewegung ist also eine Trochoide, die aus der von  $T_1$  auf  $p$  mit dem Parameterwert  $\bar{\lambda}$  durchlaufenen durch Multiplikation mit  $\lambda\mu$  von  $O$  aus entsteht. Da  $\lambda$  und  $\bar{\lambda}$  der Gleichung (3,13) genügen, müssen die entsprechenden Punkte  $T$  und  $T_1$  (nach Gleichung (1,1)) in bezug auf den Grundkreis  $g$  konjugiert sein. Wir haben also gezeigt:

*Die feste Polkurve der Bewegung des rechten Winkels  $(p, q)$  ist eine Trochoide, die durch Multiplikation von  $O$  aus der Trochoide*

entsteht, die von dem zu  $T$  in bezug auf den Grundkreis konjugierten Punkt  $T_1$  auf  $p$  beschrieben wird.

(Wir bemerken, dass man leicht nachweisen kann, dass die Gerade  $O\bar{O}T_1$  (Fig. 4) die Gerade  $q$  in dem Punkt  $T_2$  schneidet, der auf  $q$  zu  $T$  in bezug auf den Grundkreis  $\bar{g}$  von  $\bar{k}$  konjugiert ist.)

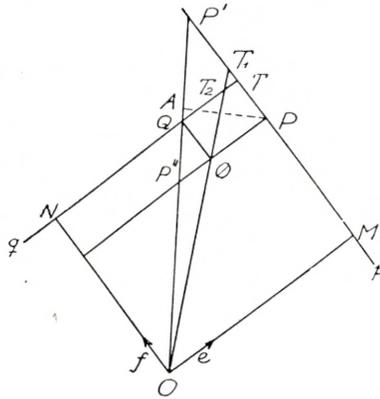


Fig. 4.

Um die rollende Polkurve zu finden, bestimmen wir den Vektor  $T\bar{O}$  durch

$$\vec{T\bar{O}} = \vec{O\bar{O}} - \vec{O\bar{T}} = (\lambda\mu - 1)h(\theta)e + (1 - \lambda)h'(\theta)f.$$

Setzt man nun

$$x = (\lambda\mu - 1)h(\theta), \quad y = (1 - \lambda)h'(\theta)$$

und wendet die Gleichung (1,6) zwischen  $h(\theta)$  und  $h'(\theta)$  an, so erhält man

$$\frac{\mu x^2}{(1 - \lambda\mu)^2} + \frac{y^2}{(1 - \lambda)^2} = \mu\alpha.$$

Hieraus schliessen wir:

*Die rollende Polkurve ist eine Ellipse oder eine Hyperbel, je nachdem ob der Modul  $\mu$  der Zykloide  $k$  positiv oder negativ ist<sup>1</sup>.*

Speziell erhält man eine Gerade in den Fällen  $\lambda = 1$  oder  $\lambda = \mu^{-1}$ , in denen  $T$  eine Zykloide durchläuft. Ist  $\tau$  im beson-

<sup>1</sup> Vgl. WUNDERLICH [2].

deren eine Rosenkurve, so geht die Gerade  $q$  durch den festen Punkt  $O$ , und die feste Polkurve ist die Fusspunktskurve von  $O$  in bezug auf die Evolute  $k''$  von  $k$ , also wieder eine Rosenkurve. Die rollende Polkurve ist wie oben wieder eine Ellipse oder Hyperbel.

Zu einem ähnlich-veränderlichen ebenen System gehört ebenso wie zu einem starren ebenen System ein Momentanpol und damit eine feste und eine rollende Polkurve<sup>1</sup>. Der Momentanpol ist der Punkt  $A$ , um den sich die momentane Drehstreckung vollzieht. Die Tangenten an die Bahnkurven bilden in jedem Zeitpunkt gleiche Winkel mit den Geraden, die die Berührungspunkte mit  $A$  verbinden. Die bewegliche Polkurve hat konstante Form, ändert aber die Grösse mit dem veränderlichen System, und die Polkurven berühren einander im Punkte  $A$ .

Wir wollen nun die Polkurven des Systems  $\Sigma$  bestimmen. Der Pol  $A$  muss so liegen, dass die Geraden  $AP$  und  $AP'$  mit den Tangenten in  $P$  bzw.  $P'$  gleiche Winkel bilden. Da diese Tangenten auf einander senkrecht stehen, gilt dies auch für  $AP$  und  $AP'$ . Der Punkt  $A$  liegt daher auf dem Kreis, der  $PP'$  zum Durchmesser hat, und dieser Kreis ist die bewegliche Polkurve. — Ferner bewegt sich der Punkt des Systems  $\Sigma$ , der momentan in den Krümmungsmittelpunkt  $P''$  (auf der Kurve  $k''$ ) fällt, längs der Normalen  $PP''$ , da die Evolute von dieser Normalen eingehüllt wird. Folglich liegt  $A$  auch auf dem Kreise mit dem Durchmesser  $PP''$ . Der Momentanpol  $A$  ist daher die Projektion des Punktes  $P$  auf die Gerade  $OP'P''$  (Fig. 4). Da der Kreis über  $PP'$  als Durchmesser den Grundkreis orthogonal schneidet, ist  $A$  der zu  $P'$  in bezug auf den Grundkreis  $g$  inverse Punkt. Wir haben also gezeigt

**Satz 3,7.** *Die bewegliche Polkurve der Bewegung des ähnlich-veränderlichen Systems  $\Sigma$  ist ein Kreis über  $PP'$  als Durchmesser, während die feste Polkurve die zu der Kurve  $k'$  in bezug auf den Grundkreis  $g$  der Kurve  $k$  inverse Kurve ist.*

Dass die beiden Polkurven sich wirklich in  $A$  berühren, geht aus der genannten Inversion, die  $A$  in  $P'$  überführt, hervor. Wie

<sup>1</sup> Enzyklop. d. Math. Wissensch. Bd. IV, 1, S. 274.

wir in Satz 3,6 erwähnt haben, durchlaufen die Punkte des Kreises über  $PP'$  als Durchmesser Zykloiden. Das stimmt damit überein, dass dieser Kreis die bewegliche Polkurve ist.

#### § 4. Der Radiusvektor als Funktion der Bogenlänge.

In den vorigen Paragraphen haben wir durch Einführung der Stützfunktion der zykloidalen Kurven in die grundlegende Differentialgleichung (1,3) eine Reihe Eigenschaften dieser Kurven gefunden. In diesem Paragraphen wollen wir (1,3) in eine gewöhnliche Differentialgleichung umformen und dadurch eine einfache Relation zwischen Radiusvektor und Bogenlänge, die natürliche Gleichung der Kurve u. a. m. herleiten.

In diesem Paragraphen beschränken wir uns auf Kurvenbögen, die keine Spitze enthalten und führen die Bogenlänge  $s$  als Parameter auf einem solchen Bogen der durch (1,3) bestimmten zykloidalen Kurve  $k$  ein. Wir setzen also

$$\vec{OP} = r(s),$$

wo  $r'(s)^2 = 1$ . Da  $MP$  die Projektion von  $OP$  auf die Tangente  $p$  ist, haben wir  $MP = r \cdot r'$  und

$$(4,1) \quad r^2 = r^2 = OM^2 + MP^2,$$

wo  $|r(s)| = r$  gesetzt ist. Hiernach nimmt (1,3) die Gestalt

$$(4,2) \quad (1 - \mu)(r \cdot r')^2 + \mu(r^2 - \alpha) = 0$$

an. In gewöhnlichen rechtwinkligen Koordinaten  $x$  und  $y$  ergibt sich so die Differentialgleichung

$$(4,3) \quad (1 - \mu)(x dx + y dy)^2 + \mu(x^2 + y^2 - \alpha)(dx^2 + dy^2) = 0.$$

Da  $r \cdot r' = \frac{1}{2} dr^2/ds$  ist, erhält man aus (4,2)

$$(1 - \mu) \left( \frac{1}{2} \frac{dr^2}{ds} \right)^2 + \mu(r^2 - \alpha) = 0.$$

Diese Gleichung hat das vollständige Integral

$$(4,4) \quad r^2 = \frac{\mu}{\mu - 1} (s + c')^2 + \alpha,$$

wo  $c'$  eine Integrationskonstante ist, sowie im Falle  $\alpha > 0$  das singuläre Integral  $r^2 = \alpha$ , von dem aber im folgenden abgesehen wird.

Die Formel (4,4) wird besonders einfach, wenn die zykloidale Kurve  $k$  einen reellen Grundkreis  $g$  hat, also eine Hypo-, Epi- oder Hyperzykloide ist, und die Bogenlänge  $s$  von einem Scheitel auf  $g$ , wo  $r^2 = \alpha$  ist, gemessen wird. Man hat dann  $c' = 0$ , also

$$(4,5) \quad r^2 = \frac{\mu}{\mu - 1} s^2 + \alpha.$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, dass das *Quadrat der Bogenlänge  $s$  von einem Scheitel bis zu einem beliebigen Kurvenpunkt  $P$  der Potenz von  $P$  in bezug auf den Grundkreis proportional ist*. Bei Hypo- und Hyperzykloiden, die ausserhalb ihrer Grundkreise liegen, ist die Bogenlänge der Länge der Tangente von  $P$  an den Grundkreis proportional.

Da die zykloidale Evolvente  $k'$  der Kurve  $k$ , wie auf S. 11 erwähnt, von einem Scheitel ausgeht, muss  $PP' = s$  sein, woraus hervorgeht, dass  $s$  ein Mass für die »Grösse« des durch  $P$  und  $P'$  bestimmten ähnlich veränderlichen Systems ist.

Es seien zwei zykloidale Kurven  $k$  und  $k_1$  mit demselben reellen Grundkreis, aber verschiedenen Moduln  $\mu$  und  $\mu_1$  gegeben; wir nehmen ferner an, dass die Kurven auf derselben Seite des Grundkreises  $g$  liegen. Es handelt sich also entweder um zwei Epizykloiden (beide innerhalb  $g$ ) oder um Hypo- oder Hyperzykloiden (beide ausserhalb  $g$ ). Aus (4,5) folgt, dass für die Bogenlängen  $s$  und  $s_1$  der beiden Kurven von  $g$  bis zu einem mit  $g$  konzentrischen Kreis die Gleichung

$$\frac{\mu_1}{\mu_1 - 1} s_1^2 = \frac{\mu}{\mu - 1} s^2$$

besteht, d. h. dass  $s$  und  $s_1$  proportional sind. Es gilt also

**Satz 4,1.** *Haben zwei zykloidale Kurven denselben reellen Grundkreis  $g$  und liegen sie auf derselben Seite von  $g$ , so schneiden mit  $g$  konzentrische Kreise proportionale Stücke der beiden Kurven aus.*

Dieser Satz wird besonders anschaulich, wenn man  $k$  und  $k_1$  so wählt, dass sie einen Scheitel auf  $g$  gemein haben.

Die obigen Betrachtungen gelten auch für  $\alpha = 0$ , d. h. im Falle der logarithmischen Spirale. Die Gleichung (4,5) drückt hier die bekannte Proportionalität zwischen Radiusvektor und der vom Pol aus gemessenen Bogenlänge aus.

Wir wollen nun die natürliche Gleichung der zykloldaligen Kurve  $k$ , d. h. die Gleichung zwischen dem Krümmungsradius  $\varrho$  und der Bogenlänge  $s$  auf  $k$ , bestimmen. Aus  $MP = r \cdot r'$  in Verbindung mit den Gleichungen (4,2) und (4,4) finden wir unmittelbar

$$(4,6) \quad MP^2 = \frac{\mu^2}{(\mu-1)^2} (s+c')^2.$$

Um  $\varrho$  zu bestimmen, differenzieren wir (4,2) nach  $s$  und erhalten nach Division mit  $r \cdot r'$

$$(4,7) \quad (1 - \mu) (r \cdot r'' + 1) + \mu = 0.$$

Bezeichnet nun  $n$  den Einheitsvektor auf der Normalen an  $k$  in  $P$ , so ist  $r'' = n/\varrho$ ; da ausserdem  $r \cdot n = NP = OM$  (wo  $N$  wie oben die Projektion von  $O$  auf die genannte Normale bedeutet), erhält man aus (4,7)

$$(4,8) \quad \varrho^2 = (\mu - 1)^2 OM^2.$$

Diese Gleichung bringt die bekannte (und charakteristische) Eigenschaft der Zykloiden, dass die Projektion des Radiusvektors auf die Normale dem Krümmungsradius proportional ist, zum Ausdruck. Aus (4,6), (4,8) und der Gleichung (1,3) findet man durch Elimination von  $MP$  und  $OM$  die natürliche Gleichung der Kurve  $k$

$$(4,9) \quad \varrho^2 + \mu(s+c')^2 = (\mu-1)^2 \alpha. {}^1$$

<sup>1</sup> Die Gleichung (4,9) kann man auch direkt durch Anwendung der allgemeinen Formel

$$\varrho^2 = \frac{r^2 - \left(\frac{1}{2} \frac{dr^2}{ds}\right)^2}{\left(1 - \frac{1}{2} \frac{d^2 r^2}{ds^2}\right)^2}$$

finden. In anderer Gestalt findet sich diese Formel bei BLASCHKE [1] und LORIA [2] II, S. 173.

Aus Gleichung (4,4) ergibt sich, dass bei einer zykloldaligen Kurve der Zusammenhang zwischen dem Radiusvektor  $r$  und der Bogenlänge  $s$  durch eine Gleichung der Form

$$(4,10) \quad r^2 = as^2 + 2bs + c$$

gegeben ist.

Es liegt nun nahe zu fragen, ob umgekehrt jede Kurve, für die eine Gleichung der Form (4,10) gilt, zykloidal ist. Um diese Frage zu beantworten, stellen wir die (4,10) entsprechende Differentialgleichung auf. Da  $r^2 = r^2$ , erhalten wir  $r \cdot r' = as + b$  aus (4,10) und weiterhin

$$(4,11) \quad (r \cdot r')^2 = ar^2 - D, \quad D = ac - b^2.$$

Für  $a \neq 0$  ist diese Gleichung vom Typus (4,2), d. h. die durch (4,10) gegebenen Kurven sind zykloidal. Zwischen  $\mu$ ,  $\alpha$  und  $a$ ,  $D$  bestehen offenbar die Relationen

$$(4,12) \quad a = \frac{\mu}{\mu-1}, \quad D = \frac{\mu\alpha}{\mu-1},$$

also

$$(4,13) \quad \mu = \frac{a}{a-1}, \quad \alpha = \frac{D}{a}.$$

Falls  $a = 0$  reduziert sich (4,10) auf

$$(4,14) \quad r^2 = 2bs + c$$

und (4,11) auf

$$(4,15) \quad r \cdot r' = b.$$

Diese Gleichung besagt, dass die Projektion des Radiusvektor auf die Tangente konstant ist, d. h. dass die Normalen der Kurve einen Kreis mit dem Mittelpunkt  $O$  und dem Radius  $|b|$  berühren. Die Kurve selbst ist daher eine Kreisevolvente<sup>1</sup>. Ist speziell  $b = 0$ , aber  $c > 0$  so reduziert sich die Kurve auf einen Kreis mit dem Mittelpunkt  $O$ .

Mit Rücksicht auf spätere Anwendungen stellen wir im fol-

<sup>1</sup> Vgl. FABRICIUS-BJERRE [2].

genden ein Schema der Kurventypen, die den verschiedenen Werten von  $a$  und  $D$  entsprechen, auf, wobei wir gleichzeitig auf das Schema (1,8), S. 7 hinweisen. Wir fügen hinzu, dass man in (4,10) und (4,11) auch den Wert  $a = 1$  (der  $\mu = \infty$  entspricht) benutzen kann, falls  $D > 0$  ist. Die entsprechende Kurve ist eine Tangente des Grundkreises, da das Quadrat des Abstandes von  $O$  zu den Kurventangenten den konstanten Wert  $\alpha = D$  hat, wie sich z. B. aus (4,11) ergibt, und der Kreis  $r^2 = \alpha$  als singuläres Integral ausgeschlossen ist.

Wir erhalten die folgenden Resultate:

$$\begin{aligned}
 & a < 0, \quad D < 0, \quad \text{Epizykloide} \\
 (4,16) \quad & a = 0, \quad \begin{cases} D < 0, & \text{Kreisevolvente} \\ D = 0, & \text{Kreis} \end{cases} \\
 & 0 < a < 1, \quad \begin{cases} D < 0, & \text{Parazykloide} \\ D = 0, & \text{logarithmische Spirale} \\ D > 0, & \text{Hyperzykloide} \end{cases} \\
 & a = 1, \quad D > 0, \quad \text{Gerade} \\
 & a > 1, \quad D > 0, \quad \text{Hypozykloide.}
 \end{aligned}$$

Man bemerkt, dass u. a. die Fälle  $a < 0, D > 0$  und  $a > 1, D < 0$ , die den anfangs ausgeschlossenen Fällen  $\mu > 0, \alpha < 0$  entsprechen, fehlen.

Wie man sieht, tritt die Kreisevolvente als Übergangskurve zwischen Epi- und Parazykloide auf. Man kann sagen, dass sie einen Grundkreis  $g$  mit unendlich grossem Radius hat, während der Kreis  $h$  von endlicher Grösse ist.

Die gemeine Zykloide ist nicht in dem obigen Schema enthalten. Sie kann als Übergangskurve zwischen der Hypo- und der Epizykloide aufgefasst werden, wenn man den Mittelpunkt  $O$  ins Unendliche rücken und die Kreise  $g$  und  $h$  gegen zwei parallele Geraden konvergieren lässt. Gewisse Eigenschaften der Zykloide können so aus entsprechenden Eigenschaften der Hypo- und Epizykloide abgeleitet werden.

Man kann zur Bestimmung der gemeinen Zykloide auch eine Differentialgleichung aufstellen und aus dieser ihre Eigenschaften ableiten. Wir wollen hier jedoch nicht darauf eingehen. Wir erwähnen nur (ohne Beweis) eine einfache bekannte Eigen-

schaft, die wir im 2. Kapitel benutzen werden. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem, dessen  $x$ -Achse den Geraden  $g$  und  $h$  parallel ist, ist die Zykloide dadurch charakterisiert, dass zwischen der Ordinate  $y$  und der Bogenlänge  $s$  eine Gleichung der Form

$$(4,17) \quad y = as^2 + 2bs + c$$

besteht, wo  $a \neq 0$  ist. Ist speziell  $a = 0$ , so stellt (4,17) eine Gerade dar. Diese Gleichung tritt bei der gemeinen Zykloide an Stelle der Gleichung (4,10).

### § 5. Berührungspunktkurven und Fusspunktkurven. Polare Kurven.

In einer Aufgabe im Intermé d. d. Math.<sup>1</sup> hat C. JUEL darauf aufmerksam gemacht, dass die Berührungspunkte der Tangenten, die man von einem gegebenen Punkt  $A$  aus an eine Epi- oder Hypozykloide ziehen kann, auf der Fusspunktkurve von  $A$  in bezug auf einen Kegelschnitt, also auf einer bizirkulären Kurve vierter Ordnung mit dem Doppelpunkt  $A$  liegen. Später wurde bewiesen, dass diese bizirkuläre Kurve die Berührungspunkte der Tangenten von  $A$  an alle Kurven der durch die genannte Zykloide bestimmten Rotationsschar enthält; ferner wurde bemerkt, dass der Satz auch für die Pseudozykloiden gilt.<sup>2</sup>

Mit Hilfe der in Satz 1,1 gegebenen Charakterisierung der zyklroidalen Kurven beweisen wir im folgenden diesen Satz für sämtliche zyklroidalen Kurven; ausserdem erwähnen wir einige daran anknüpfende Sätze.

Die zyklroidale Kurve  $k$  sei durch den Grundkreis  $g$  mit dem Mittelpunkt  $O$  bestimmt, und das gegebene Verhältnis  $PP_1/PP_2$  sei  $f$ . Die  $k$  enthaltende Rotationsschar werde mit  $(k)$  bezeichnet. Nach Satz 1,1 müssen die Berührungspunkte der Tangenten, die man von  $A$  aus an die Kurven der Schar  $(k)$  ziehen kann, auf dem geometrischen Ort  $J_t$  derjenigen Punkte einer variablen Geraden  $p$  durch  $A$  liegen, die die von  $g$  abgeschnittene Sehne

<sup>1</sup> Bd. 1 (1894), S. 243.

<sup>2</sup> WIELEITNER [1], S. 210 und 218.

$P_1P_2$  im Verhältnis  $f$  teilen. Auf jeder Geraden durch  $A$  gibt es dann zwei reelle oder imaginäre Punkte  $P$  der Kurve  $J_t$ .

Wir nehmen zunächst an, dass  $g$  kein Nullkreis ist. Wir betrachten eine Inversion mit dem Zentrum  $A$ , die  $g$  in sich überführt. Dabei werden  $P_1$  und  $P_2$  vertauscht, und ein Punkt  $P$  auf  $J_t$  wird in einen Punkt  $P'$  übergeführt, für den das Doppelverhältnis  $(AP'P_1P_2)$  den konstanten Wert  $f$  (oder  $1/f$ ) hat. Dreht sich also  $p$  um  $A$ , so durchläuft  $P'$  einen Kegelschnitt  $\kappa$ , der  $g$  in den Berührungspunkten  $B$  und  $C$  der Tangenten  $t_B$  und  $t_C$  von  $A$  an  $g$  berührt. Die Kurve  $J_t$  ist daher invers zum Kegelschnitt  $\kappa$ , also eine bizirkuläre Kurve vierter Ordnung mit dem (reellen oder imaginären) Doppelpunkt  $A$ . Die Doppelpunktstangenten sind die Tangenten an die beiden Kurven der Schar  $(k)$ , die durch  $A$  gehen. Die Kurve  $J_t$  berührt den Grundkreis in  $B$  und  $C$ . Diese Punkte können aber natürlich imaginär sein.

Hiermit ist der verallgemeinerte Juelsche Satz bewiesen. Der Kegelschnitt, in bezug auf welchen die Fusspunktcurve von  $A$  die Kurve  $J_t$  ist, ist nach einem bekannten Satz der polare Kegelschnitt von  $\kappa$  in bezug auf den Kreis um  $A$ , der durch  $B$  und  $C$  geht. Dieser Kegelschnitt ist aber im vorliegenden Zusammenhang nur von geringem Interesse.

Ist  $g$  speziell ein Nullkreis, also  $k$  eine logarithmische Spirale, so existiert die obige Inversion nicht. In diesem Fall ist  $J_t$  offenbar ein Kreis durch die Punkte  $O$  und  $A$ . Betrachtet man die ganze Rotationsschar von logarithmischen Spiralen (s. S. 8), so erhält man ausserdem das Spiegelbild dieses Kreises an der Geraden  $OA$ . Die bizirkuläre Kurve entartet in zwei Kreise. — Besondere Verhältnisse können auch bei spezieller Lage des Punktes  $A$ , z. B. im Unendlichen, eintreten. Darauf wollen wir jedoch nicht näher eingehen.

Variiert  $f$  (oder der Modul  $\mu$ ), während der Grundkreis  $g$  und der Punkt  $A$  fest bleiben, so liegen die zugehörigen Kegelschnitte  $\kappa$  sämtlich in dem durch die Linienelemente  $(B, t_B)$  und  $(C, t_C)$  bestimmten Büschel, und die entsprechenden bizirkulären Kurven  $J$  gehören daher dem inversen Büschel an. Wir erhalten also den

**Satz 5,1.** *Die Berührungspunkte der Tangenten von einem gegebenen Punkt  $A$  an eine Rotationsschar  $(k)$  von zyklonalen Kurven*

liegen auf einer bizirkulären Kurve vierter Ordnung  $J_t$  mit dem Doppelpunkt  $A$ . Variiert  $f$  (oder  $\mu$ ), so durchläuft  $J_t$  ein Büschel bizirkulärer Kurven.

Wir betrachten nun die Fusspunkte der Normalen von  $A$  an das System  $(k)$ . Diese Geraden sind Tangenten an die Orthogonalschar von  $(k)$ , und da diese, wie auf S. 10 erwähnt, wieder eine Rotationsschar zyklroidaler Kurven ist, liegen auch die Fusspunkte der Normalen auf einer bizirkulären Kurve vierter Ordnung  $J_n$  mit dem Doppelpunkt  $A$ . Die Tangenten an  $J_n$  im Punkte  $A$  stehen auf den Tangenten an  $J_t$  senkrecht. Ferner berührt  $J_n$  den Grundkreis  $g$  in den Schnittpunkten mit der Geraden  $OA$ . Variiert  $f$  (oder  $\mu$ ), so gehören auch die Kurven  $J_u$  einem Büschel an. Es gilt also auch

**Satz 5,2.** Die Fusspunkte der Normalen von einem gegebenen Punkt  $A$  an eine Rotationsschar zyklroidaler Kurven liegen auf einer bizirkulären Kurve vierter Ordnung  $J_n$  mit dem Doppelpunkt  $A$ . Variiert  $f$  (oder  $\mu$ ), so durchläuft  $J_n$  ein Büschel bizirkulärer Kurven.

Zu derselben Schar  $(k)$  gehörige Kurven  $J_t$  und  $J_n$  können ausser  $A$  und den Kreispunkten der Ebene keine Punkte gemeinsam haben. Sie berühren sich daher in den Kreispunkten. Von den 16 gemeinsamen Punkten der Kurven fallen dann je 6 in jeden der Kreispunkte und 4 in den Punkt  $A$ .

Mit Hilfe der Differentialgleichung (4,3) des Systems  $(k)$  kann man leicht die Gleichungen der beiden Kurven  $J_t$  und  $J_n$  angeben. Der Punkt  $A$  habe die rechtwinkligen Koordinaten  $(p, q)$ . Für die Tangente von  $A$  mit dem Berührungspunkt  $(x, y)$  gilt dann  $(dx, dy) = t(x - p, y - q)$ , wo  $t$  ein beliebiger Parameter ist, und entsprechend hat man für die Normale  $(dx, dy) = t(-(y - q), x - p)$ . Setzt man diese Ausdrücke in (4,3) ein, so erhält man für  $J_t$  und  $J_n$  die Gleichungen

$$(5,1) \begin{cases} J_t: (1 - \mu)(x^2 + y^2 - px - qy)^2 + \mu(x^2 + y^2 - a)((x - p)^2 + (y - q)^2) = 0 \\ J_n: (1 - \mu)(qx - py)^2 + \mu(x^2 + y^2 - a)((x - p)^2 + (y - q)^2) = 0 \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen geht unmittelbar hervor, dass beide Kurven bizirkulär sind, und dass man für variables  $\mu$  Kurvenbüschel erhält.

Wir betrachten wieder eine zyklonale Kurve  $k$  mit der Tangente  $p$  in dem variablen Kurvenpunkt  $P$ . Wie oben bezeichne  $M$  die Projektion des Pols  $O$  auf  $p$ . Die Kurve sei durch das Zahlenpaar  $(\mu, \alpha)$  mit  $\alpha \neq 0$  gegeben. Wie auf S. 16 erwähnt, beschreibt  $M$  eine Rosenkurve, wenn  $P$  die Kurve  $k$  durchläuft. Der zu  $M$  in bezug auf den Grundkreis  $g$  inverse Punkt  $Q$  ist Pol der Tangente  $p$  und durchläuft also die zu  $k$  polare Kurve  $k_1$  (Fig. 5). Eine solche Kurve heisst eine Ährenkurve, und

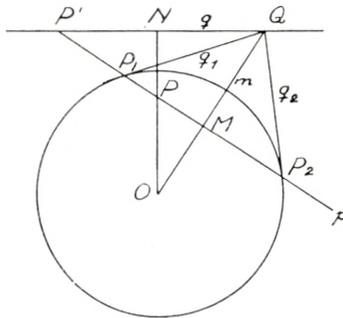


Fig. 5.

zwar eigentliche oder uneigentliche (Pseudoährenkurve), je nachdem  $\mu$  positiv oder negativ ist.<sup>1</sup> Ist  $k$  eine eigentliche Zykloide, deren Tangenten den Grundkreis  $g$  schneiden, so liegt  $k_1$  ganz ausserhalb  $g$ . Ist  $k$  eine Hyperzykloide, so liegt  $k_1$  ganz innerhalb von  $g$ . Bei einer uneigentlichen Ährenkurve ist der Punkt  $O$  Asymptotenpunkt.

Die Tangente  $q$  an  $k_1$  in  $Q$  steht auf  $OP$  senkrecht und schneidet  $OP$  in dem zu  $P$  in bezug auf  $g$  inversen Punkt  $N$ . Dieser Punkt durchläuft daher die zu  $k$  inverse Kurve, die zugleich die Fusspunktkurve von  $O$  in bezug auf  $k_1$  ist. Der Schnittpunkt von  $p$  und  $q$  ist der Pol der Geraden  $PQ$  und daher der zu  $P$  konjugierte Punkt  $P'$  auf  $p$ . Da  $P'$  die zyklonale Evolvente von  $k$  durchläuft, so hüllt  $PQ$  eine neue Ährenkurve ein.

Für die Ährenkurve  $k_1$  gilt eine der Gleichung (1,1) dual entsprechende Gleichung sowie eine dem Satz 1,1 dual entsprechende Charakterisierung. Hier beschränken wir uns wieder auf einen Bogen von  $k$ , der keine Spitze enthält. Es seien  $q_1$  und  $q_2$  die Tangenten von  $Q$  an den Grundkreis (mit den Be-

<sup>1</sup> WIELEITNER [1], S. 124 und 264.

rührungspunkten  $P_1$  und  $P_2$  auf  $p$ ) und  $m$  bezeichne die Gerade  $OMQ$ . Aus der Figur entnimmt man

$$(5,2) \quad \frac{\cot^2(mq)}{\cot^2(mq_1)} = \mu,$$

indem man zu den Komplementwinkeln im Punkte  $O$  übergeht. Ebenso sieht man, dass wegen  $P'P_1/P'P_2 = -f$  auch  $\sin(qq_1)/\sin(qq_2) = -f$ , also konstant ist.

Aus der Figur entnimmt man ferner die Relationen

$$\frac{NQ^2}{ON^2} = \cot^2(mq) = \mu \cot^2(mq_1) = \mu \frac{QP_1^2}{OP_1^2} = \mu \frac{OQ^2 - \alpha}{\alpha},$$

aus denen sich die Differentialgleichung für  $k_1$  ergibt. Setzt man nämlich  $\vec{OQ} = r(s)$ , so findet man

$$NQ^2 = (r \cdot r')^2; \quad ON^2 = r^2 - (r \cdot r')^2,$$

also

$$(5,3) \quad \alpha(r \cdot r')^2 = \mu(r^2 - \alpha)(r^2 - (r \cdot r')^2)$$

oder in rechtwinkligen Koordinaten

$$(5,4) \quad \alpha(xdx + ydy)^2 - \mu(x^2 + y^2 - \alpha)(xdy - ydx)^2 = 0.$$

Diese Differentialgleichung für die Kurve  $k_1$  gilt für alle Vorzeichen von  $\mu$  und  $\alpha$ ; sie kann ohne geometrische Betrachtungen aus der Differentialgleichung (4,2) oder (4,3) für die zyklodalen Kurven abgeleitet werden. Die Integralkurven von (5,3) oder (5,4) bilden eine Rotationsschar mit dem Mittelpunkt  $O$ , die wir mit  $(k_1)$  bezeichnen werden.

Wir fragen nun nach dem geometrischen Ort der Berührungspunkte der Tangenten von einem Punkt  $A(p, q)$  der Ebene an die Rotationsschar  $(k_1)$  von Ährenkurven. Setzt man wie oben  $(dx, dy) = t(x - p, y - q)$ , so findet man aus (5,4) die Gleichung

$$(5,5) \quad \alpha(x^2 + y^2 - px - qy)^2 - \mu(x^2 + y^2 - \alpha)(qx - py)^2 = 0.$$

Hieraus ergibt sich

**Satz 5,3.** *Die Berührungspunkte der Tangenten von einem gegebenen Punkt  $A$  an eine Rotationsschar  $(k_1)$  von Ährenkurven liegen auf einer algebraischen Kurve vierter Ordnung mit Doppelpunkten in  $O$  und  $A$ .*

Durch Einsetzen von  $(dx, dy) = t(-(y - q), x - p)$  in (5,4) findet man den geometrischen Ort der Fusspunkte der Normalen von  $A$  an die Kurvenschar. Es ergibt sich eine Kurve 6. Ordnung mit den Kreispunkten als dreifachen Punkten.

Eine algebraische Kurve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten hat im allgemeinen die Klasse 8. Mit Hilfe der Polarität, die die Kurvenscharen  $(k_1)$  und  $(k)$  in einander überführt, erhalten wir für die zyklidalen Kurven den

**Satz 5,4.** *Es sei eine Rotationsschar  $(k)$  von zyklidalen Kurven und eine Gerade  $a$  gegeben. Die Tangenten an die zyklidalen Kurven in den Schnittpunkten mit der Geraden  $a$  hüllen eine algebraische Kurve 8. Ordnung und 4. Klasse ein; die Gerade  $a$  und die unendlich ferne Gerade  $u$  sind Doppeltangenten dieser Kurve.*

## § 6. Nichteuklidische Deutung der zyklidalen Kurven und ihrer polaren Kurven.

Wir werden im folgenden die untersuchten Kurven von einem neuen Gesichtspunkt aus betrachten, indem wir für eine vorgelegte zyklidale Kurve  $k$  eine nichteuklidische Metrik mit dem Grundkreis  $g$  der Kurve als absolutem Kegelschnitt einführen.

Unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen sei  $U$  der Schnittpunkt der Tangente  $p$  und der unendlich fernen Geraden  $u$  der Ebene. Die in Satz 1,1 formulierte Charakterisierung besagt dann, dass das Doppelverhältnis  $(PUP_1P_2)$  konstant bleibt, wenn  $P$  die Kurve durchläuft. Der nichteuklidische Abstand  $PU$  ist daher konstant, also

**Satz 6,1.** *Jede zyklidale Kurve kann als nichteuklidische Traktrix gedeutet werden.<sup>1</sup>*

Dual entsprechend findet man für die polare Kurve  $k_1$  einer zyklidalen Kurve  $k$ , dass das Doppelverhältnis  $(qm_1q_2)$

<sup>1</sup> Durch räumliche Betrachtungen wurde dies schon früher von WUNDERLICH [3], S. 167 und FABRICIUS-BJERRE [1], S. 10 bewiesen.

(s. Fig. 5), d. h. der nichteuklidische Winkel ( $qm$ ) konstant ist. Eine Kurve, die die Geraden eines Büschels unter einem konstanten nichteuklidischen Winkel schneidet, soll als nichteuklidische Loxodrome bezeichnet werden. Dann gilt der (6,1) entsprechende

**Satz 6,2.** *Jede Ährenkurve kann als nichteuklidische Loxodrome gedeutet werden.*

Es sollen nun die den verschiedenen Realitätsverhältnissen entsprechenden Möglichkeiten näher untersucht werden.

Ist  $k$  eine Hypo- oder Epizykloide, so begrenzt der reelle Grundkreis die hyperbolische Ebene. Die Gerade  $u$  liegt ausserhalb dieser Ebene, und die zugehörigen Ährenkurven liegen, ebenfalls, ausserhalb der hyperbolischen Ebene.

Ist  $k$  eine Hyperzykloide, so ist der Grundkreis gleichfalls reell, die Tangenten von  $k$  verlaufen ganz ausserhalb der hyperbolischen Ebene. Die zu ihr polare Ährenkurve, die Pointsotsche Spirale<sup>1</sup> heisst, liegt daher in der hyperbolischen Ebene. Es gilt somit

**Satz 6,3.** *Eine Pointsotsche Spirale kann aufgefasst werden als Loxodrome in einer hyperbolischen Metrik, deren absoluter Kegelschnitt der Grundkreis der Loxodrome ist. Der Mittelpunkt des Grundkreises ist der Pol der Loxodrome.*

Das stimmt damit überein, dass die Pointsotsche Spirale bekanntlich die Projektion einer sphärischen Loxodrome auf eine zu der Geraden durch die Pole senkrechte Ebene ist.

Ist schliesslich  $k$  eine Parazykloide, so ist der Grundkreis  $g$  imaginär und die zugehörige nichteuklidische Metrik elliptisch; sie umfasst die ganze Ebene. Es gilt dann

**Satz 6,4.** *Eine Parazykloide kann als elliptische Traktrix aufgefasst werden.*

Für die zur Parazykloide polare Kurve, die keinen besonderen Namen erhalten hat, gilt

**Satz 6,5.** *Die polare Kurve einer Parazykloide kann als elliptische Loxodrome aufgefasst werden.*

<sup>1</sup> S. z. B. WIELEITNER [1], S. 263.

Durch den imaginären Grundkreis  $g$  legen wir nun eine Nullkugel, deren Mittelpunkt  $C$  sei. Um  $C$  als Mittelpunkt legen wir gleichzeitig eine reelle Kugel  $I'$ . Projizieren wir die betrachteten Kurven von  $C$  aus auf  $I'$ , so wird die Parazykloide in eine sphärische Traktrix in bezug auf den zur gegebenen Ebene parallelen Grosskreis und die polare Kurve in eine sphärische Loxodrome mit den Polen dieses Grosskreises als Polen übergeführt. Die beiden Kurven sind zu einander sphärisch polar.

Die Parazykloide ist eine isogonale Trajektorie der Erzeugenden des projizierenden Kegels mit dem Scheitelpunkt  $C$ , da der Winkel zwischen einer Erzeugenden und der Tangente der Parazykloide in dem entsprechenden Punkt mit dem durch die Traktrix bestimmten konstanten Winkel übereinstimmt. — Ist umgekehrt eine ebene Kurve isogonale Trajektorie der Erzeugenden eines Kegels, so ist die sphärische Leitkurve des Kegels eine Traktrix und die gegebene ebene Kurve eine elliptische Traktrix, also eine Parazykloide. Hiermit haben wir einen neuen Beweis eines vor kurzem von WUNDERLICH<sup>1</sup> publizierten Satzes, der aussagt, dass die Parazykloiden mit den ebenen Kegelloxodromen (isogonalen Trajektorien) identisch sind. Die hier auftretenden projizierenden Kegel, die uns im folgenden wiederholt begegnen werden, nennen wir W-Kegel.

Schliesslich wollen wir noch auf die nichteuklidische Bedeutung der in den Sätzen 5,3 und 5,4 vorkommenden Kurven eingehen. Da eine Ährenkurve als nichteuklidische Loxodrome aufgefasst werden kann, ist der geometrische Ort der Berührungspunkte der Tangenten von einem festen Punkt  $A$  an eine Rotationschar solcher Kurven offenbar eine Kurve, von deren Punkten aus die Strecke  $OA$  unter dem zur Loxodrome gehörigen konstanten Winkel gesehen wird (vgl. logarithmische Spirale = euklidische Loxodrome). Die in Satz 5,3 vorkommende Kurve ist also eine zum Punktepaar  $O, A$  gehörige nichteuklidische isoptische Kurve.

Dual entsprechend sind die in Satz 5,4 vorkommenden Kurven einhüllende Kurven einer Strecke konstanter nichteuklidischer Länge, wobei deren Endpunkte auf den mit  $a$  und  $u$  bezeichneten Geraden gleiten. Die Kurven sind also nichteukli-

<sup>1</sup> WUNDERLICH [5], S. 11.

sche Asteroïden. Das entnimmt man natürlich auch direkt aus Satz 6,1. Wir haben somit

**Satz 6,6.** *Die Kurve vierter Ordnung des Satzes 5,3 ist eine nichteuklidische isoptische Kurve des Punktepaares  $O, A$  und die Kurve des Satzes 5,4 eine nichteuklidische Asteroïde mit den Achsen  $a$  und  $u$ .*

## 2. KAPITEL

### Zykloïdale Raumkurven.

#### § 7. Einführung der zykloïdalen Raumkurven.

Eine Raumkurve  $k$  habe im Punkte  $P$  die Tangente  $p$ , es sei  $M$  die Projektion eines festen Punktes  $O$  des Raumes auf  $p$ . Die Kurve  $k$  heisst eine zykloïdale Raumkurve, falls für die ganze Kurve die (1,3) entsprechende Gleichung

$$(7,1) \quad MP^2 + \mu OM^2 = \mu\alpha$$

gilt, wo  $\mu$  und  $\alpha$  gegebene Zahlen sind ( $\mu \neq 0$  und  $\mu \neq 1$ ).

Die Kugel mit dem Mittelpunkt  $O$  und dem Radiusquadrat  $\alpha$ , die wir mit  $\Gamma$  bezeichnen wollen, heisst die zu  $k$  gehörige Grundkugel. Die zu  $\Gamma$  konzentrische Kugel, deren Radius das Quadrat  $\mu\alpha$  hat, bezeichnen wir mit  $\Delta$ . Jede der Kugeln  $\Gamma$  und  $\Delta$  kann reell, imaginär oder eine Nullkugel sein, je nach den Vorzeichen der Grössen  $\mu$  und  $\alpha$ .

Eine Tangente  $p$  an  $k$  schneidet die Grundkugel  $\Gamma$  in reellen oder imaginären Punkten  $P_1$  und  $P_2$ , und aus der Gleichung (7,1) folgt wie in der Ebene, dass das Verhältnis  $PP_1/PP_2$  konstant ( $= f$ ) ist. Ist umgekehrt dieses Verhältnis konstant, so folgt eine Gleichung der Form (7,1). Die Konstanten  $\mu$  und  $f$  sind durch Gleichung (1,1), S. 5 verknüpft. Analog zu Satz 1,1 gilt für zykloïdale Raumkurven Hjelmslevs Charakterisierung, die wir im folgenden Satz aussprechen:

**Satz 7,1.** *Eine zykloïdale Raumkurve ist dadurch charakterisiert, dass die Tangente  $p$  in einem beliebigen Punkt  $P$  der Kurve eine feste Kugel  $\Gamma$  in reellen oder imaginären Punkten  $P_1$  und  $P_2$  derart schneidet, dass das Verhältnis  $PP_1/PP_2$  konstant bleibt, wenn  $P$  die Kurve durchläuft.*

Während für die ebenen zyklroidalen Kurven die Einführung der Stützfunktion eine Klassifizierung sowie die in §§ 2 und 3 entwickelte Theorie ermöglichte, kann Entsprechendes für die zyklroidalen Raumkurven nicht durchgeführt werden. Dagegen kann man wie in der Ebene eine Beziehung zwischen der Bogenlänge  $s$  auf  $k$  und der Länge  $r$  des Radiusvektor  $\vec{OP} = r(s)$  aufstellen. Wir beschränken uns dabei wieder auf einen Bogen, der keine Spitze enthält. Wie in § 4 kann (7,1) in die Differentialgleichung

$$(7,2) \quad (1 - \mu) (r \cdot r')^2 + \mu(r^2 - \alpha) = 0$$

umgeformt werden, deren Integral (s. 4,4)

$$(7,3) \quad r^2 = \frac{\mu}{\mu-1} (s + c')^2 + \alpha$$

ist. (Von dem eventuellen singulären Integral  $r = \sqrt{\alpha}$  wird wieder abgesehen.)

Zwischen den Grössen  $r$  und  $s$  ergibt sich dann für die zyklroidalen Raumkurven dieselbe Relation wie für die ebenen zyklroidalen Kurven. Hieraus folgt, dass  $k$  in die durch (7,1) (oder (7,2) oder (7,3)) bestimmte ebene zyklroidale Kurve übergeht, wenn man den Kegel  $(O, k)$ , der den Pol  $O$  mit der Kurve  $k$  verbindet, in eine Ebene abwickelt. Eine solche Abwicklung von  $k$  heisse eine zentrale Abwicklung vom Punkte  $O$  aus. Ist umgekehrt die zentrale Abwicklung einer Raumkurve  $k$  von einem Punkt  $O$  aus eine ebene zyklroidale Kurve, so gilt natürlich eine Gleichung der Form (7,3), die die Gleichungen (7,2) und (7,1) zur Folge hat, d. h. die Raumkurve ist zyklroidal. Man hat also

**Satz 7,2.** *Eine Raumkurve ist dann und nur dann zyklroidal, wenn sie eine zentrale Abwicklung besitzt, die eine ebene zyklroidale Kurve ist.*

Wickelt man mit festem  $O$  den Kegel  $(O, k)$  auf eine Ebene durch  $O$  ab, so sind die Schnittkreise dieser Ebene mit den Kugeln  $I$  und  $A$  die zur entstehenden ebenen Zykluide gehörigen Kreise  $g$  und  $h$ .

Während die Zahlen  $\mu$  und  $\alpha$  eine zyklroidale Kurve in der

Ebene eindeutig bestimmen, gilt das natürlich nicht für die Raumkurven, da man den Zentralkegel  $(O, k)$  ganz beliebig vorschreiben kann. Auch das umgekehrte ist nicht allgemein richtig, wenn  $O$  nicht vorgegeben ist. Wir werden später zeigen, dass unendlich viele Gleichungen (7,1) mit verschiedenen Werten von  $\mu$  und  $\alpha$  für die sogenannten polyzykloidalen Kurven gelten.

Für eine beliebige zyklonale Raumkurve gilt

**Satz 7,3.** *Der Punkt  $P'$ , der auf der Tangente  $p$  einer zyklonalen Raumkurve  $k$  zum Berührungspunkt  $P$  in bezug auf die Grundkugel  $\Gamma$  konjugiert ist, beschreibt eine Evolvente  $k'$  von  $k$ .*

Der Beweis dieses Satzes verläuft genau wie der Beweis des ersten Teiles von Satz 2,1, S. 11. Der zweite Teil von Satz 2,1 kann nicht auf Raumkurven übertragen werden, da die Evolvente i. a. keine zyklonale Raumkurve ist.

Die Punkte  $T$  auf  $p$ , die die Strecke  $PP'$  in konstantem Verhältnis teilen (oder für die  $MT = \lambda MP$  ist) beschreiben verallgemeinerte Trochoiden, speziell beschreibt  $M$  eine verallgemeinerte Rosenkurve, und die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  durchlaufen sphärische Kurven.

Ist  $\Gamma$  reell, und hat  $k$  einen Punkt mit  $\Gamma$  gemeinsam ( $k$  berührt dann  $\Gamma$  in diesem Punkt), so liegt dieser Punkt auch auf  $k'$ . Bei der zentralen Abwicklung von  $k$  geht dieser Punkt in einen Scheitel der ebenen zyklonalen Kurve über. Misst man die Bogenlänge  $s$  auf  $k$  von diesem Punkt aus, so ist in (7,3) die Konstante  $c' = 0$ , und alle Abstände zwischen den oben genannten Punkten  $T$  auf  $p$  sind zu  $s$  proportional.

Ferner kann Satz 4,1 unmittelbar auf Raumkurven übertragen werden:

**Satz 7,4.** *Haben zwei zyklonale Raumkurven dieselbe reelle Grundkugel  $\Gamma$ , so schneiden zu  $\Gamma$  konzentrische Kugeln proportionale Bögen aus den beiden Kurven aus.*

Im folgenden ist es zweckmässig, zu den zyklonalen Raumkurven nicht nur die Kurven zu rechnen, für die eine Gleichung der Form (7,3) gilt, sondern alle diejenigen, für welche die allgemeinere Gleichung (4,10)

$$(7,4) \quad r^2 = as^2 + 2bs + c,$$

d. h. die Differentialgleichung (4,11)

$$(7,5) \quad (r \cdot r')^2 = ar^2 - D, \quad D = ac - b^2,$$

gilt. Nach dem Schema auf S. 27 bedeutet dies, dass wir auch diejenigen Kurven in Betracht ziehen, deren zentrale Abwicklungen Kreisevolventen, Kreisbögen oder Geraden sind.

Im nächsten Paragraphen werden wir die verschiedenen Typen von zyklroidalen Raumkurven, die den auf S. 27 genannten Typen ihrer zentralen Abwicklung entsprechend, untersuchen. Diesen Paragraphen schliessen wir mit der Bestimmung des Krümmungsradius  $\varrho$  in einem beliebigen Punkt  $P$  einer durch (7,5) gegebenen zyklroidalen Raumkurve.

Durch Differentiation von (7,5) erhält man nach Kürzung mit  $r \cdot r'$

$$(7,6) \quad r \cdot r'' = a - 1,$$

da  $r'^2(s) = 1$ . Es bezeichne  $n$  die Hauptnormale von  $k$  im Punkt  $P$ ,  $\pi$  einen Einheitsvektor auf dieser Normalen und  $N$  die Projektion von  $O$  auf  $n$ . Dann haben wir (vgl. S. 25)  $r'' = \pi/\varrho$  und  $r \cdot \pi = NP$ . Es ergibt sich also aus (7,6)

$$(7,7) \quad \varrho = \frac{PN}{1-a}.$$

Da diese Relation offenbar die zyklroidalen Raumkurven (wie die ebenen zyklroidalen Kurven) kennzeichnet, erhalten wir

**Satz 7,5.** *Die zyklroidalen Raumkurven sind dadurch charakterisiert, dass es einen Punkt  $O$  im Raume derart gibt, dass der Krümmungsradius im Kurvenpunkt  $P$  der Projektion des Radiusvektor  $OP$  auf die Hauptnormale proportional ist.*

Die Differentialgleichung (7,5) oder in rechtwinkligen Koordinaten

$$(7,8) \quad (x dx + y dy + z dz)^2 = (a(x^2 + y^2 + z^2) - D)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

ist eine Mongesche Differentialgleichung<sup>1</sup>. Für einen gegebenen Punkt  $P$  im Raum liegen die Tangentenvektoren

<sup>1</sup> Enzyklopädie der Mathem. Wissensch. III, 3, S. 260.

( $dx, dy, dz$ ) der Integralkurven auf einem Rotationskegel mit der Geraden  $OP$  als Achse. Der Kegel kann in eine Ebene oder in eine Gerade ausarten oder imaginär sein.

Nach einem Satz von S. LIE liegen die Krümmungsmittelpunkte derjenigen Integralkurven einer Mongeschen Differentialgleichung, die durch ein Linienelement  $(P, p)$  gehen, auf einem Kreis, dem Lieschen Kreis. Den Lieschen Kreis der zyklroidalen Raumkurven, die Integralkurven der Gleichung (7,8) sind, findet man unmittelbar, da der oben genannte Punkt  $N$  (die Projektion von  $O$  auf  $n$ ) auf dem Schnittkreis der Normalebene zu  $p$  in  $P$  und der Kugel über  $OP$  als Durchmesser liegt. Aus Formel (7,7) folgt, dass die Krümmungsmittelpunkte auf einem Kreise liegen, der aus dem genannten durch Multiplikation mit  $\frac{1}{1-a}$  von  $P$  aus hervorgeht.

Variiert die Tangente  $p$ , während der Punkt  $P$  fest bleibt, so liegen die sämtlichen Lieschen Kreise auf der Kugel, die aus der Kugel mit  $OP$  als Durchmesser durch Multiplikation mit  $\frac{1}{1-a}$  von  $P$  aus hervorgeht. Sie überdecken i. a. eine Zone der Kugel.

### § 8. Hauptformen der zyklroidalen Raumkurven.

Im folgenden werden wir einige Bemerkungen über den Verlauf einer zyklroidalen Raumkurve machen, deren zentrale Abwicklung von einem Punkte  $O$  aus eine gegebene ebene zyklroidale Kurve ist.

**1.** *Die zentrale Abwicklung der Raumkurve ist eine Hypo- oder Epizykloide.*

Sowohl  $\mu$  als auch  $\alpha$  sind positiv, die beiden Fälle entsprechen bzw.  $\mu \gtrless 1$  (s. S. 7). Die Grundkugel  $\Gamma$  und die Kugel  $\Delta$  sind reell, und die zyklroidale Raumkurve  $k$  verläuft im Raum zwischen den beiden Kugeln, ausserhalb bzw. innerhalb von  $\Gamma$ . Die Kurve  $k$  berührt  $\Gamma$ , während ihre Tangente in einem Punkt von  $\Delta$  auf der Tangentialebene von  $\Delta$  in diesem Punkt senkrecht steht.

Die Tangente  $p$  im Punkte  $P$  schneidet  $\Gamma$  in den reellen Punkten  $P_1$  und  $P_2$ , und  $P$  liegt ausserhalb bzw. auf der Strecke

$P_1P_2$  ( $f \geq 0$ ). Wenn  $P$  die Kurve  $k$  durchläuft, durchlaufen  $P_1$  und  $P_2$  sphärische Kurven  $k_1$  und  $k_2$  derart, dass die Tangenten in  $P_1$  und  $P_2$  in derselben Ebene, nämlich der Schmiegebene von  $k$  in  $P$ , liegen und dass das Verhältnis der Geschwindigkeiten von  $P_1$  und  $P_2$  konstant gleich  $f$  ist. Letzteres ergibt sich daraus, dass  $PP_1/PP_2 = f$  ist (vgl. S. 16). Infolgedessen haben auch die Längen entsprechender Bögen der beiden Kurven dieses konstante Verhältnis.

Sind umgekehrt zwei Kurven  $k_1$  und  $k_2$  auf der Kugel gegeben, deren Punkte  $P_1$  und  $P_2$  so gepaart sind, dass die Tangenten in entsprechenden Punkten in derselben Ebene liegen und dass entsprechende Bogenlängen proportional sind, so beschreibt die Gerade  $P_1P_2$  eine Torse, deren Gratlinie eine zyklonale Raumkurve der betrachteten Art ist. Da die Bogenlängen von  $k_1$  und  $k_2$  proportional sind, gilt nämlich dasselbe für die Geschwindigkeiten von  $P_1$  und  $P_2$ , und das Verhältnis  $PP_1/PP_2$  ist somit konstant. Es gilt also

**Satz 8.1.** *Eine zyklonale Raumkurve, deren zentrale Abwicklung von einem Punkt  $O$  aus eine Hypo- oder Epizykloide ist, ist dadurch charakterisiert, dass ihre Tangentenfläche eine Kugel um  $O$  in Kurven  $k_1$  und  $k_2$  schneidet, bei denen entsprechende Bogenlängen proportional sind.*

In § 12 werden wir an einem Beispiel zeigen, wie solche Kurven  $k_1$  und  $k_2$  konstruiert werden können.

**2.** *Die zentrale Abwicklung der Raumkurve ist eine Hyperzykloide.*

Hier ist  $\mu$  negativ und  $\alpha$  positiv, so dass die Grundkugel  $\Gamma$  reell, die Kugel  $\Delta$  aber imaginär ist. Die Raumkurve  $k$  liegt ausserhalb von  $\Gamma$ , berührt  $\Gamma$  jedoch in einem Punkt; ihre Tangenten schneiden  $\Gamma$  nicht.

Durch die Tangente  $p$  im Punkte  $P$  legen wir nun eine Tangentialebene an die Grundkugel  $\Gamma$ . Den Berührungspunkt bezeichnen wir mit  $R$  (Fig. 6);  $M$  bezeichne wie gewöhnlich die Projektion von  $O$  auf  $p$ , so dass die Ebene  $OMR$  auf  $p$  senkrecht steht. Wir setzen wieder  $\mu = -m^2$ . Da  $OM^2 = \alpha + MR^2$ , erhalten wir aus (7,1), dass  $MP/MR = m$ . Bezeichnet  $v$  den Winkel zwischen der Tangente  $p$  und der Geraden  $PR$ , so ist also  $\cot v = m$ .

Variiert nun  $P$  und damit  $p$ , so beschreibt die Gerade  $RP$  eine der Grundkugel umschriebene Torse  $\Sigma$ , und auf dieser ist die Kurve  $k$  isogonale Trajektorie. Die Torse  $\Sigma$  berührt  $\Gamma$  längs der von  $R$  durchlaufenen Kurve  $\varkappa$ , deren Tangente  $t$  in  $R$  auf der Geraden  $PR$  senkrecht steht. Die Tangente  $t$  bildet dann auch den Winkel  $v$  mit der Geraden  $MR$ . Da die Ebene  $OMR$  die Kugel  $\Gamma$  in einem Grosskreis schneidet, der sphärische Tangente an das Binormalenbild der Kurve  $k$  auf  $\Gamma$  ist, ist  $\varkappa$  also eine

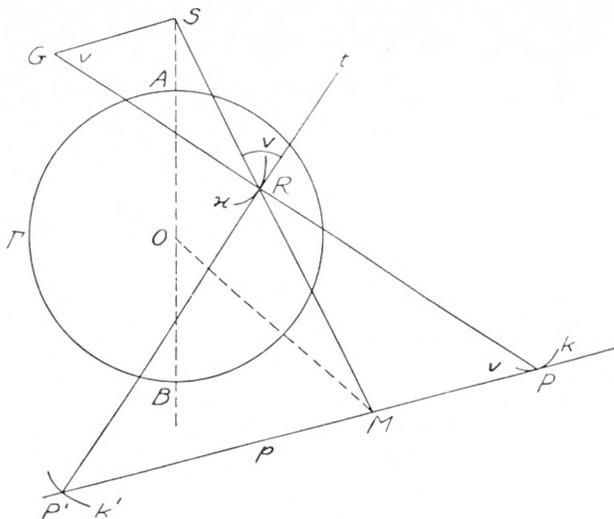


Fig. 6.

sphärische Kurve, die die sphärischen Tangenten des Binormalenbildes von  $k$  unter dem konstanten Winkel  $v$  schneidet.

Ist umgekehrt eine Torse  $\Sigma$  einer Kugel  $\Gamma$  umschreiben, so ist jede isogonale Trajektorie der Erzeugenden der Torse eine zykloidale Raumkurve der betrachteten Art. Denn ist der Winkel  $v$  zwischen der Erzeugenden  $RP$  und der Tangente  $p$  in  $P$  konstant, so hat man  $MP/MR = \cot v$  und die Gleichung (7,1) ist für  $\mu = -\cot^2 v$  erfüllt. Es gilt also

**Satz 8,2.** Eine zykloidale Raumkurve  $k$ , deren zentrale Abwicklung von einem Punkte  $O$  aus eine Hyperzykloide ist, kann als isogonale Trajektorie einer Torse, die einer Kugel um  $O$  umschrieben ist, charakterisiert werden. Die Berührungskurve der Torse mit der Kugel schneidet die sphärischen Tangenten des Binormalenbildes von  $k$  unter demselben Winkel wie  $k$  die Erzeugenden der Torse.

Für die oben (S. 26) eingeführte Konstante  $a = \frac{\mu}{\mu-1}$  findet man, wegen  $\mu = -\cot^2 v$  den einfacheren Ausdruck  $a = \cos^2 v$  in Übereinstimmung damit, dass  $a$  zwischen 0 und 1 liegt, (s. das Schema auf S. 27).

**3.** Die zentrale Abwicklung der Raumkurve ist eine logarithmische Spirale.

Hier ist  $\mu$  negativ und  $\alpha = 0$ . Die Kugeln  $\Gamma$  und  $\Delta$  sind beide Nullkugeln, deren Mittelpunkt  $O$  asymptotischer Punkt der Raumkurve  $k$  ist. Die Kurve schneidet offenbar die Erzeugenden des Zentralkegels  $(O, k)$  unter dem konstanten Winkel  $v$ , wo wie oben  $\cot v = m$  und  $\mu = -m^2$  ist. Eine Raumkurve mit dieser Eigenschaft heisst eine Kegelloxodrome; es gilt also

**Satz 8,3.** Eine zykloidale Raumkurve, deren zentrale Abwicklung eine logarithmische Spirale ist, ist eine Kegelloxodrome.

**4.** Die zentrale Abwicklung der Raumkurve ist eine Parazykloide.

Sowohl  $\mu$  als auch  $\alpha$  sind negativ. Die Kugel  $\Gamma$  ist imaginär, während  $\Delta$  reell ist. Die Raumkurve  $k$  liegt ausserhalb von  $\Delta$ . In einem gemeinsamen Punkt mit  $\Delta$  geht die Tangente an  $k$  durch den Mittelpunkt  $O$ .

**5.** Die zentrale Abwicklung der Raumkurve ist eine Kreisevolvente<sup>1</sup>.

In diesem Fall ist der Zusammenhang zwischen der Bogenlänge  $s$  und dem Radiusvektor  $r$  durch die Gleichung (4,14), S. 26 und die zugehörige Differentialgleichung (4,15) gegeben, und man schliesst wie in der Ebene, dass die Projektion des Radiusvektors auf die Kurventangente konstant ist, was im Raum besagt, dass die Normalebenen der Kurve eine Kugel mit dem Mittelpunkt  $O$  und dem Radius  $|b|$  berühren. Diese Kugel ist nicht die Grundkugel  $\Gamma$  (die unendlich grossen Radius hat), sondern die Kugel  $\Delta$ . Da (4,15) die Gleichung (4,14) zur Folge hat, gilt

**Satz 8,4.** Eine zykloidale Raumkurve, deren zentrale Abwicklung von einem Punkt  $O$  aus eine Kreisevolvente ist, ist dadurch charak-

<sup>1</sup> s. FABRICIUS-BJERRE [2].

terisiert, dass die Normalebenen der Kurve eine Kugel  $\Delta$  mit dem Mittelpunkt  $O$  berühren.

Diese Normalebenen hüllen eine Torse  $\Sigma$  ein, die  $\Delta$  umschrieben ist und deren Gratlinie der geometrische Ort der Mittelpunkte der Schmiegekugeln der Kurve ist. Die Raumkurve  $k$  ist eine Planevolvente dieser Gratlinie. Wir können also Satz 8,4 folgendermassen formulieren:

**Satz 8,5.** *Eine zykloidale Raumkurve, deren zentrale Abwicklung von einem Punkt  $O$  aus eine Kreisevolvente ist, ist Planevolvente der Gratlinie einer Torse, die einer Kugel  $\Delta$  um  $O$  umschrieben ist.*

Aus Formel (7,7), S. 39 ergibt sich  $q = PN$  für  $a = 0$ , so dass  $N$  der zu  $P$  gehörige Krümmungsmittelpunkt von  $k$  ist; wir haben also

**Satz 8,6.** *Der geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte einer zykloidalen Raumkurve, deren zentrale Abwicklung von einem Punkt  $O$  aus eine Kreisevolvente ist, ist die Fusspunktkurve von  $O$  in bezug auf die Hauptnormalen der Kurve.*

**6.** *Die zentrale Abwicklung der Raumkurve ist eine Gerade oder ein Kreisbogen.*

Ist die zentrale Abwicklung der Raumkurve von einem Punkt  $O$  aus eine Gerade, so muss  $k$  eine geodätische Linie auf dem Zentralkegel  $(O, k)$  sein. Dem entspricht  $a = 1$  (und  $\mu = \infty$ ). Alle Tangenten an  $k$  berühren die Grundkugel  $I$  (der Radius der Kugel  $\Delta$  ist unendlich gross), und  $k$  ist also Gratlinie einer  $I$  umschriebenen Torse  $\Sigma$ . Da umgekehrt die Gratlinie einer der Kugel umschriebenen Torse geodätische Linie auf dem Kegel ist, der die Kurve mit dem Mittelpunkt der Kugel verbindet, gilt

**Satz 8,7.** *Eine zykloidale Raumkurve, deren zentrale Abwicklung von einem Punkt  $O$  aus eine Gerade ist, ist Gratlinie einer Torse, die einer Kugel  $I$  um  $O$  umschrieben ist. Sie ist geodätische Linie auf dem Zentralkegel.*

Ist die zentrale Abwicklung von  $O$  aus ein Kreisbogen um  $O$  so liegt  $k$  auf einer Kugel um  $O$ . Dem entspricht der Wert  $a = 0$  (und  $b = 0$ ) (s. S. 26).

Wir bemerken, dass die beiden letzten Fälle sich unter Satz 8,2 einordnen. Da  $a = \cos^2 v$ , finden wir  $v = 0$  für  $a = 1$ , was

der Gratlinie auf der Torse  $\Sigma$  entspricht. Für  $a = 0$  haben wir  $v = \frac{\pi}{2}$ , und  $k$  ist orthogonale Trajektorie der Erzeugenden der Torse, also Evolvente der Gratlinie. Die Berührungskurve  $k_R$  der Torse mit der Grundkugel ist aber Evolvente der Gratlinie, so dass auch die übrigen Evolventen sphärische Kurven auf Kugeln um  $O$  sind.

Zusammenfassend können wir also sagen: Ist  $\Sigma$  eine Torse, die einer Kugel um  $O$  umschrieben ist, so sind die isogonalen Trajektorien, die Gratlinie sowie die Filar- und Planevolvente der Gratlinie von  $\Sigma$  sämtlich zykloidale Raumkurven, deren zentrale Abwicklungen von  $O$  aus Hyperzykloiden, Geraden, Kreise bzw. Kreisevolventen sind.

Wie in der Ebene kann man auch im Raum eine nicht-euklidische Metrik mit der zu der zykloidalen Kurve  $k$  gehörenden Grundkugel  $I$  als absolute Fläche einführen. Die Kurve  $k$  kann dann als nichteuklidische Traktrix aufgefasst werden, da die nichteuklidische Länge der Tangente vom Berührungspunkt bis zum Schnittpunkt mit der unendlich fernen Ebene konstant ist.

Wenden wir eine Polarität in bezug auf  $I$  an, so geht  $k$  in die Schmiegeebene einer Raumkurve  $k_1$  über, die als Verallgemeinerung der auf S. 31 und ff. betrachteten Ährenkurven angesehen werden kann. Offenbar ist für die Kurve  $k_1$  der nicht-euklidische Winkel zwischen der Schmiegeebene und der Ebene durch die Tangente und den Mittelpunkt  $O$  des von  $I$  konstant, d. h.  $k_1$  hat auf dem Zentralkegel  $(O, k_1)$  die Eigenschaft, dass der *nichteuklidische Winkel zwischen der Schmiegeebene in einem Punkt der Kurve und der Tangentialebene des Kegels in diesem Punkt konstant ist*. Ist  $I$  speziell eine Nullkugel und  $k$  folglich eine Kegelloxodrome, so kann man eine Polarität in bezug auf eine beliebige reelle Kugel um  $O$  anwenden. Dann entsteht eine Kurve  $k_1$ , für die der gewöhnliche (euklidische) Winkel zwischen der Schmiegeebene und der Tangentialebene des Zentralkegels konstant ist. Diese Kurven sind kürzlich von W. WUNDERLICH<sup>1</sup> unter dem Namen pseudogeodätische Kurven untersucht worden.

<sup>1</sup> WUNDERLICH [8], [9], [10], [11].

### § 9. Polyzykloidale Kurven.

Wir wollen im folgenden eine Raumkurve  $k$  betrachten, deren zentrale Abwicklungen von zwei verschiedenen Punkten  $O_1$  und  $O_2$  aus zyklonale Kurven sind. Dann gelten zwei Gleichungen der Form

$$(9,1) \quad r_1^2 = a_1 s^2 + 2 b_1 s + c_1$$

$$(9,2) \quad r_2^2 = a_2 s^2 + 2 b_2 s + c_2,$$

wo  $r_1$  und  $r_2$  die Abstände des dem Parameterwert  $s$  entsprechenden Kurvenpunktes  $P$  von den Punkten  $O_1$  und  $O_2$  bedeuten.<sup>1</sup> Zu der Kurve gehören dann zwei Moduln  $\mu_1$  und  $\mu_2$  und zwei Grundkugeln  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$ , deren Radien die Quadrate  $a_1$  und  $a_2$  haben. Die Grössen  $\mu_i$  und  $a_i$  sind mit den Koeffizienten  $a_i, b_i, c_i$  durch die Gleichungen (4,12) oder (4,13), S. 26 verknüpft. Für eine solche Kurve  $k$  gilt der folgende Hauptsatz:

**Satz 9,1.** *Eine Raumkurve  $k$ , die in bezug auf zwei Punkte  $O_1$  und  $O_2$  zyklonal ist, ist auch in bezug auf alle Punkte der Geraden  $O_1 O_2$  zyklonal.*

Wir wählen ein XYZ-Koordinatensystem so, dass die Punkte  $O_1$  und  $O_2$  auf der Z-Achse liegen; ihre Koordinaten bezeichnen wir mit  $(0, 0, p_1)$  bzw.  $(0, 0, p_2)$ . Ferner setzen wir  $O_1 O_2 = p_2 - p_1 = h$ . Es sei nun  $O$  ein beliebiger Punkt der Z-Achse. Seine Koordinaten können dann  $(0, 0, \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2)$  geschrieben werden, wo

$$(9,3) \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

ist. Der Punkt  $P$  habe die Koordinaten  $(x, y, z)$ . Dann gilt

$$(9,4) \quad \lambda_1 r_1^2 + \lambda_2 r_2^2 = x^2 + y^2 + (z - (\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2))^2 + \lambda_1 \lambda_2 (p_2 - p_1)^2$$

also, wenn  $OP = r$  gesetzt wird,

$$(9,5) \quad r^2 = \lambda_1 r_1^2 + \lambda_2 r_2^2 - \lambda_1 \lambda_2 h^2.$$

<sup>1</sup> In jeder dieser Gleichungen sind die Koeffizienten den aus der Diskussion in § 4 folgenden Einschränkungen unterworfen. Aus den Untersuchungen dieses und der folgenden Paragraphen lassen sich weitere notwendige Bedingungen entnehmen. Die Frage, ob diese Bedingungen auch hinreichend für die Existenz einer Raumkurve sind, die (9,1) und (9,2) genügt, bleibt unentschieden.

Setzen wir hier die Ausdrücke für  $r_1^2$  und  $r_2^2$  aus (9,1) und (9,2) ein, so ergibt sich für  $r^2$  in der Tat ein Ausdruck der Form

$$(9,6) \quad r^2 = as^2 + 2bs + c,$$

woe die Koeffizienten durch

$$(9,7) \quad a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$$

$$(9,8) \quad b = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$$

$$(9,9) \quad c = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 - \lambda_1 \lambda_2 h^2$$

bestimmt sind.

Damit ist der Satz 9,1 bewiesen.

Durch Subtraktion von (9,2) und (9,1) entsteht eine Gleichung der Form

$$(9,10) \quad qz = (a_1 - a_2)s^2 + 2(b_1 - b_2)s + c',$$

die zeigt (s. S. 28), dass  $k$  bei Abwicklung derjenigen Zylinderfläche durch  $k$ , deren Erzeugenden der Geraden  $O_1 O_2$  parallel sind, von Ausartungen abgesehen, in eine gemeine Zykloide übergeht. Dies entspricht einer »zentralen Abwicklung« von dem unendlich fernen Punkt der Geraden aus.

Eine Raumkurve  $k$  mit der Eigenschaft, dass für jeden Punkt einer Geraden eine Gleichung der Form (9,6) (und für den unendlich fernen Punkt eine Gleichung (9,10)) gilt, heisst eine polyzykloide Raumkurve. Die Gerade, die gemeinsame Zentrale aller Grundkugeln ist, heisst die Achse der Kurve. Es ist natürlich gleichgültig, welche beiden Punkte  $O_1$  und  $O_2$  der Achse (und zugehörige Relationen (9,1) und (9,2)) man als Ausgangspunkte wählt, und einer von ihnen kann durch den unendlich fernen Punkt ersetzt werden.

In diesem und allen folgenden Paragraphen werden die polyzykloidalen Raumkurven näher untersucht. Um einen Überblick über die verschiedenen Möglichkeiten zu erhalten, wenn die Koeffizienten in (9,1) und (9,2) variieren, bestimmen wir durch Elimination von  $s$  eine Fläche  $\Phi$ , auf der die polyzykloide Raumkurve  $k$  liegt. Wir setzen hierbei voraus, dass  $a_1$  und  $a_2$  nicht

beide verschwinden, und als Gleichung von  $\Phi$  ergibt sich dann

$$(9,11) \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 - r_1^2 \\ a_2 & c_2 - r_2^2 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & c_1 - r_1^2 \\ b_2 & c_2 - r_2^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Gleichung (9,11) stellt eine Rotationsfläche mit der Achse der Kurve (der  $Z$ -Achse) als Achse dar. Schneidet man die Fläche mit der  $YZ$ -Ebene, d. h. setzt man in (9,11)

$$r_1^2 = y^2 + (z - p_1)^2, \quad r_2^2 = y_2^2 + (z - p_2)^2,$$

so stellt (9,11) einen Meridianschnitt  $\varphi$  der Fläche dar. Wir wollen die verschiedenen Hauptformen dieser Meridiankurve untersuchen.

Die Determinante  $S' = a_1(c_2 - r_2^2) - a_2(c_1 - r_1^2)$  ist für  $a_1 \neq a_2$  die linke Seite einer Kreisgleichung. Für  $a_1 = a_2$  erhält man einen linearen Ausdruck in  $z$ , der sich nicht auf eine Konstante reduziert, da  $p_1 \neq p_2$ . Für die Determinante

$$S = b_1(c_2 - r_2^2) - b_2(c_1 - r_1^2)$$

gilt entsprechendes. Aus (9,11) ergibt sich

$$(9,12) \quad S'^2 - 4dS = 0,$$

wo

$$d = a_1b_2 - a_2b_1$$

gesetzt ist.

Wir erhalten vier verschiedene Möglichkeiten, je nachdem ob  $a_1 \neq a_2$  und  $d \neq 0$ .

1)  $a_1 \neq a_2$ ,  $d \neq 0$ .

In diesem Fall stellt (9,12) ein Cartesisches Oval dar, das Enveloppe der quadratischen Kreisschar

$$(9,13) \quad dt^2 + S't + S = 0$$

ist. Der Mittelpunkt des Kreises  $S' = 0$  ist der ausserordentliche Brennpunkt und der Kreis  $S = 0$  ist doppelt berührender Kreis des Ovals<sup>1</sup>. Durch Umdrehung von  $\varphi$  um die  $Z$ -Achse entsteht eine Zyklide  $\Phi$ , die als Cartesisches Ovaloid bezeichnet wird. Man kann zeigen, dass sie von einer beliebigen

<sup>1</sup> Vgl. z. B. SALMON, Courbes planes, Paris 1903, S. 354.

Ebene in einem (eventuell ausgearteten) Cartesischen Oval geschnitten wird.

Eine allgemeine polyzykloide Raumkurve  $k$  liegt also auf einem Cartesischen Ovaloid.

$$2) a_1 \neq a_2, d = 0.$$

Die Fläche  $\Phi$  reduziert sich auf eine Kugelfläche.

$$3) a_1 = a_2, d \neq 0.$$

Wie oben erwähnt ist  $S'$  in diesem Fall eine Linearform in  $z$ . Da  $a_1 = a_2$ , aber  $d \neq 0$  ist, muss  $b_1 \neq b_2$  sein, d. h.  $S$  wird eine Kreisgleichung. Die Gleichung (9,12) stellt dann einen Kegelschnitt  $\varphi$  dar, der kein Kreis sein kann und der von der Schar (9,13) eingehüllt wird. Die Fläche  $\Phi$  ist also eine von einer Kugel verschiedene Rotationsfläche zweiter Ordnung<sup>1</sup>.

$$4) a_1 = a_2 \neq 0, d = 0.$$

Die Fläche  $\Phi$  reduziert sich auf eine zur Achse senkrechte Ebene.

Wir haben oben vorausgesetzt, dass  $a_1$  und  $a_2$  nicht beide verschwinden. Für  $a_1 = a_2 = 0$  ergibt sich aus (9,1) und (9,2), dass die Kurve  $k$  auf einer Kugel oder in einer Ebene liegt, je nachdem  $b_1 \neq b_2$  oder  $b_1 = b_2$  ist. Wir sehen vorläufig von diesem Spezialfall ab und werden in § 14 darauf zurückkommen.

Als Zusammenfassung der obigen Untersuchung haben wir also

**Satz 9,2.** *Eine polyzykloide Kurve liegt im allgemeinen auf einem Cartesischen Ovaloid. Sie kann speziell auf einer Rotationsfläche 2. Ordnung, einer Kugel oder in einer Ebene liegen.*

Aus (9,7) entnimmt man, dass der Koeffizient  $a$  eine lineare Funktion der  $z$ -Koordinate von  $O$  ist. Wenn er nicht konstant ist ( $a_1 \neq a_2$ ), nimmt er also jeden Wert genau einmal an. Nach (4,13) gilt dies daher auch für den Modul  $\mu$ . Wir haben also

**Satz 9,3.** *Liegt eine zyklonale Raumkurve auf einem Cartesischen Ovaloid oder einer Kugel, so nehmen der Koeffizient  $a$  und*

<sup>1</sup> Wenn im folgenden von einer Rotationsfläche zweiter Ordnung die Rede ist, soll die Kugel stets ausgeschlossen sein.

der Modul  $\mu$  der zentralen Abwicklung von einem Punkt  $O$  der Achse aus jeden Wert genau einmal an, wenn  $O$  die Achse durchläuft. Liegt die Kurve auf einer Rotationsfläche zweiter Ordnung oder in einer Ebene, so ist  $a$  konstant, und  $\mu$  hat für alle zentralen Abwicklungen von Punkten der Achse aus denselben Wert.

Nur im letzten Fall kann man daher der Raumkurve einen bestimmten Modul  $\mu$  zuschreiben.

Um einen Überblick über die unendlich vielen Grundkugeln zu erhalten, die zu einer polyzykloidalen Raumkurve gehören, schreiben wir (9,1) und (9,2) in der Form

$$(9,13) \quad r_1^2 = a_1 \left( s + \frac{b_1}{a_1} \right)^2 + \alpha_1$$

$$(9,14) \quad r_2^2 = a_2 \left( s + \frac{b_2}{a_2} \right)^2 + \alpha_2,$$

wo wir  $a_1$  und  $a_2$  von null verschieden voraussetzen;  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  sind durch die Gleichungen (4,13), S. 26 bestimmt. Die Bedingungen  $d \neq 0$  und  $d = 0$  sind offenbar gleichbedeutend mit  $b_1/a_1 \neq b_2/a_2$  bzw.  $b_1/a_1 = b_2/a_2$ .

Wir betrachten zunächst den Fall  $d \neq 0$ . Eine Kugel um  $O_1$  schneidet die Fläche  $\Phi$  i. a. in zwei (reellen oder imaginären) Kreisen. Die beiden Werte von  $s$ , die die Gleichung  $r_1^2 = \beta$  befriedigen, ergeben nämlich in (9,14) zwei verschiedene Kugeln um  $O_2$ . Wählen wir speziell die Grundkugel, für die  $\beta = \alpha_1$  ist, so ergibt sich jedoch nur der Wert  $s = -b_1/a_1$ , die beiden Kreise fallen also zusammen. Die Grundkugel berührt infolgedessen  $\Phi$  längs eines Kreises. — Ist dagegen  $d = 0$ , also  $b_1/a_1 = b_2/a_2$ , so schneidet die Grundkugel  $\Gamma_1$  offenbar die Kugel oder die Ebene  $\Phi$  in demselben Kreis wie die Grundkugel  $\Gamma_2$ . Da  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  als beliebige Grundkugeln angesehen werden können, gilt

**Satz 9.4.** *Die Grundkugeln einer polyzykloidalen Kurve auf einem Cartesischen Ovaloid oder einer Rotationsfläche 2. Ordnung sind die Kugeln der quadratischen Schar, die die Fläche einhüllen. Liegt die Kurve auf einer Kugel oder in einer Ebene  $\Phi$ , so bilden die Grundkugeln ein Kugelbüschel, das  $\Phi$  enthält.*

Die Bedingungen  $d \neq 0$  bzw.  $d = 0$  haben für die Abwicklungen von  $k$  die folgenden Konsequenzen. Es sei  $P$  ein Punkt

der Raumkurve und  $d \neq 0$ . Bei der zentralen Abwicklung von  $k$  vom Mittelpunkt derjenigen Grundkugel aus, die längs des Parallelkreises durch  $P$  berührt, geht der Punkt  $P$  in einen Scheitel der ebenen zykloldal Kurve über. Das trifft bei den anderen Abwicklungen nicht zu. Jeder Punkt von  $k$  wird somit Scheitel von genau einer zentralen Abwicklung. Ist dagegen  $d = 0$ , so geht ein Punkt von  $k$ , der auf dem gemeinsamen Kreis des Kugelbüschels liegt, bei allen Abwicklungen in einen Scheitel über, während kein Punkt ausserhalb dieses Kreises bei irgend einer Abwicklung in einen Scheitel übergeht.

Nur im letzten Fall kann man also der Raumkurve einen bestimmten »Scheitel« zuschreiben.

In den folgenden 4 Paragraphen werden wir die Eigenschaften der vier genannten Typen von polyzykloidal Kurven genauer untersuchen.

### § 10. Polyzykloidale Kurven auf einem Cartesischen Ovaloid.

Nach Satz 9,3 kann bei einer polyzykloidalen Raumkurve  $k$  auf einem Cartesischen Ovaloid  $\Phi$  jeder Wert von  $a$  in der zu einem Punkt  $O$  der Achse gehörenden Relation (9,6) vorkommen, und nach Satz 9,4 bilden die zu den Punkten  $O$  gehörenden Grundkugeln das  $\Phi$  einhüllende System. Von besonderem Interesse sind die Punkte  $O'$  und  $O''$  der Achse, denen die Werte  $a = 0$  und  $a = 1$  entsprechen. Benutzen wir diese Punkte als Ausgangspunkte  $O_1$  und  $O_2$ , so ist  $a_1 = 0$  in (9,1) und  $a_1 = 1$  in (9,2). Wir machen ferner die Parametertransformation  $\bar{s} = s + b_2$  wo  $\bar{s}$  die Bogenlänge auf  $k$  von dem (eventuell imaginären) Schnittpunkt von  $k$  mit der zu  $O''$  gehörenden Grundkugel  $I''$  aus bezeichnet. Statt (9,1) und (9,2) erhalten wir dann

$$(10,1) \quad r'^2 = 2b'\bar{s} + c'$$

$$(10,2) \quad r''^2 = \bar{s}^2 + \alpha',$$

und die Gleichung von  $\Phi$  wird

$$(10,3) \quad (c' - r'^2)^2 + 4b'^2(\alpha' - r''^2) = 0,$$

wo  $d = -b' \neq 0$  ist.

Hieraus ergibt sich, dass  $O'$  der ausserordentliche Brennpunkt von  $\Phi$  ist, ferner entnimmt man aus (10,1), (S. 26 und S. 43), dass die zentrale Abwicklung von  $k$  von  $O'$  aus eine Kreisevolvente ist. Aus Satz 8,4 erhält man also

**Satz 10,1.** *Die Normalebene einer polyzykloidalen Raumkurve auf einem Cartesischen Ovaloid berühren eine Kugel  $\Delta$  um den ausserordentlichen Brennpunkt  $O'$  der Fläche.*

Die Kugel  $\Delta$  mit dem Radius  $|b'|$  gehört nicht zur Schar der Grundkugeln.

Die Abwicklung der Kurve  $k$  vom Punkt  $O''$  aus ist eine Gerade (S. 44). Satz 8,7 ergibt somit

**Satz 10,2.** *Die Tangenten einer polyzykloidalen Raumkurve auf einem Cartesischen Ovaloid berühren die zum Punkte  $O''$  gehörende Grundkugel  $I''$ . Die Kurve ist auf dem Kegel  $(O'', k)$  geodätisch.*

Die Punkte  $O'$  und  $O''$  teilen die Achse in drei Teile, eine Halbgerade mit dem Endpunkt  $O'$ , wo  $a < 0$ , eine Halbgerade mit dem Endpunkt  $O''$ , wo  $a > 1$ , und die Strecke  $O'O''$ , wo  $0 < a < 1$ . Wählt man den Punkt  $O$  auf der ersten bzw. zweiten Halbgeraden, so ist die zentrale Abwicklung von  $k$  eine Epi-zykloide bzw. Hypozykloide (s. das Schema S. 27). Die zugehörigen Grundkugeln sind alle reell, und da  $k$  in diesen Fällen innerhalb bzw. ausserhalb der zugehörigen Grundkugel liegt (s. S. 40), umschliesst die erste Schar von Grundkugeln die Fläche  $\Phi$ , während die andere Schar ausserhalb von  $\Phi$  liegt. Den Übergang zwischen den beiden Scharen bildet die auf der Achse senkrechte Ebene, die  $\Phi$  längs eines (reellen oder imaginären) Kreises berührt. Für jede der reellen Grundkugeln gilt Satz 8,1.

Liegt  $O$  auf der Strecke  $O'O''$ , so ist die Abwicklung von  $k$  eine Hyperzykloide, eine logarithmische Spirale oder eine Parazykloide, je nachdem  $D = ac - b^2 \gtrless 0$  (s. S. 27). Die Grösse  $D$  ergibt sich aus (9,7), (9,8) und (9,9), wo  $(a_1, b_1, c_1) = (0, b', c')$  und  $(a_2, b_2, c_2) = (1, 0, \alpha'')$  zu setzen ist. Ferner setzen wir  $\lambda_2 = x$  und  $\lambda_1 = 1 - x$  und finden

$$a = x, \quad b = (1 - x)b', \quad c = -(1 - x)c' + x\alpha'' - x(1 - x)h^2$$

und damit

$$(10,4) \quad D = D(x) = h^2x^3 + ( \quad )x^2 + ( \quad )x - b'^2.$$

Da  $D(0) = -b'^2$  und  $D(1) = \alpha'' > 0$ , hat  $D(x) = 0$  mindestens eine und höchstens drei reelle Nullstellen zwischen 0 und 1, was damit übereinstimmt, dass ein Cartesisches Oval (ausser dem ausserordentlichen) mindestens einen und höchstens drei reelle Brennpunkte hat. Durch Anwendung von Satz 8,3 ergibt sich also

**Satz 10,3.** *Eine polyzykloidale Raumkurve auf einem Cartesischen Ovaloid ist Loxodrome auf mindestens einem und höchstens drei Kegeln, deren Scheitel die ordentlichen Brennpunkte der Fläche sind.*

Hat  $\Phi$  drei Brennpunkte, so sind diese Kurven identisch mit den von CESÀRO [2] und vor kurzem von WUNDERLICH [6] untersuchten polykonischen Loxodromen.

Hat  $\Phi$  nur einen Brennpunkt  $F_1$ , so ist die zu  $O$  gehörende Grundkugell reell, wenn  $O$  auf  $O'F_1$  liegt, imaginär, wenn  $O$  auf  $F_1O'$  liegt, und die zentralen Abwicklungen sind Hyper- bzw. Parazykloiden. Die zu den Hyperzykloiden gehörenden Grundkugeln liegen ganz ausserhalb von  $\Phi$ . Hat  $\Phi$  drei reelle Brennpunkte, so gibt es noch eine zweite Schar von Hyper- und eine zweite Schar von Parazykloiden (WUNDERLICH l. c.).

Auf die Kurve  $k$  kann man auch den Satz 8,2 anwenden und erhält

**Satz 10,4.** *Eine polyzykloidale Raumkurve auf einem Cartesischen Ovaloid ist isogonale Trajektorie auf unendlich vielen Torsen, die zur Kurve gehörenden Grundkugeln umschrieben sind.*

Der Winkel  $v$ , unter dem  $k$  die Erzeugenden schneidet, variiert von Torse zu Torse, da er (s. S. 43) durch  $\cos^2 v = a$  bestimmt ist.

Hiermit sind die verschiedenen zentralen Abwicklungen der Kurve  $k$  klar gestellt. Wie oben erwähnt, ist  $k$  durch Relationen der Form (9,1) und (9,2) für zwei beliebige Punkte der Achse bestimmt. Hieraus folgt z. B., dass eine Raumkurve eine polyzykloidale Raumkurve auf einem Cartesischen Ovaloid ist, wenn ihre Tangenten eine feste Kugel und ihre Normalebenen eine andere feste Kugel berühren. Eine Raumkurve ist ebenfalls polyzykloidal, wenn sie entweder isogonale Trajektorie auf zwei verschiedenen Torsen ist, die Kugeln umschrieben sind, oder geodätische Linie auf einem Kegel und Loxodrome auf einem zweiten ist.

Wir gehen nun zu den Evolventen einer polyzykloidalen Kurve  $k$  auf einem Cartesischen Ovaloid über. Die Tangenten an  $k$  berühren die Grundkugel  $I''$  längs einer Evolvente von  $k$ , woraus folgt, dass sämtliche Evolventen von  $k$  sphärische Kurven sind, von denen je zwei, die zu demselben Abstand von dem Punkte auf  $I''$  gehören, auf einer Kugel um  $O''$  liegen. Es gilt also

**Satz 10,5.** *Sämtliche Evolventen einer polyzykloidalen Raumkurve auf einem Cartesischen Ovaloid liegen auf Kugeln um  $O''$ . Die kleinste dieser Kugeln, die Grundkugel  $I''$ , wird von der Tangentenfläche der Kurve berührt.*

Die Evolvente, deren Ausgangspunkt ein Punkt  $P_0$  von  $k$  ist, wird, wie in Satz 7,3 erwähnt, von demjenigen Punkt  $P'$  erzeugt, der auf der Tangente  $p$  in  $P$  in bezug auf die Grundkugel, die  $\Phi$  in  $P_0$  berührt, zu  $P$  konjugiert ist. Jedem Punktepaar  $PP'$  entspricht ein System von Punkten  $T$  auf der Tangente, das  $PP'$  in konstantem Verhältnis teilt (ähnlich-veränderliches System). Dieses System variiert mit  $P_0$ .

Sind insbesondere  $P$  und  $P'$  konjugiert in bezug auf eine Nullkugel um einen der gewöhnlichen Brennpunkte  $F$  der Fläche, so sieht man die Strecke  $PP'$  von  $F$  aus unter einem rechten Winkel, und das zu  $P, P'$  gehörende ähnlich-veränderliche System auf der Tangente  $p$  hat die Eigenschaft, dass jede beliebige Strecke  $T_1T_2$  von  $F$  aus unter konstantem Winkel gesehen wird.

Für die Krümmungsmittelpunkte der Kurve  $k$  gilt nach Satz 8,6

**Satz 10,6.** *Der geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte einer polyzykloidalen Raumkurve auf einem Cartesischen Ovaloid ist die Fusspunktcurve des ausserordentlichen Brennpunktes der Fläche in bezug auf die Hauptnormalen der Kurve.*

Da  $k$  geodätische Linie auf dem Kegel  $(O'', k)$  ist, liegt der Punkt  $O''$  auf der rektifizierenden Ebene der Kurve, und die Projektion auf die Hauptnormale ist  $P$  selbst. Satz 10,6 kann dann folgendermassen formuliert werden:

**Satz 10,7.** *Der Krümmungsradius in einem Punkte  $P$  der Kurve  $k$  ist die Projektion der Strecke  $O'O''$  auf die Hauptnormale.*

Der Krümmungsradius ist somit proportional dem cosinus des Winkels zwischen der Achse und der Hauptnormalen.

Wir erwähnen, dass CESÀRO [2] die natürlichen Gleichungen einer polykonischen Loxodrome, also einer polyzykloidalen Kurve auf einem Cartesischen Ovaloid mit drei reellen Brennpunkten gefunden hat. Für diese Kurven hat WUNDERLICH [6] die Sätze 10,1 und 10,2 bewiesen und ferner u. a. gezeigt, dass die Kurve und ihre ebene Evolute geodätische Linien auf kongruenten Kegeln sind und dass die Schmeigkugeln der Kurve das Ovaloid  $\Phi$  berühren, d. h. dass die Kurve eine sogenannte Darboux-Kurve auf der Fläche ist. Die Beweise der letzteren Sätze sind unabhängig von der Anzahl der reellen Brennpunkte von  $\Phi$ , und die Sätze gelten daher für alle polyzykloidalen Kurven auf einem Cartesischen Ovaloid.

---

Schliesslich wollen wir sämtliche polyzykloidalen Kurven bestimmen, die auf einem vorgelegten Cartesischen Ovaloid  $\Phi$  liegen. (Für die polykonischen Loxodromen verweisen wir auf WUNDERLICH [6].)

Nach Satz 10,2 müssen wir diese Kurve unter den Kurven auf  $\Phi$  suchen, deren Tangenten eine der (reellen) Kugeln  $\Gamma$  berühren, die  $\Phi$  (reell oder imaginär) längs eines Kreises berühren und (einschliesslich ihres Inneren) ausserhalb von  $\Phi$  liegen. Wir zeigen nun umgekehrt:

**Satz 10,8.** *Jede Kurve auf  $\Phi$ , deren Tangentenfläche einer der Kugeln  $\Gamma$ , die  $\Phi$  längs eines Parallelkreises berühren und ausserhalb von  $\Phi$  liegen, umschrieben ist, ist polyzykloidal.*

Als Gleichung für ein beliebiges Cartesisches Ovaloid können wir (9,12) benutzen, wo  $S' = 0$  als Gleichung einer Kugel um den ausserordentlichen Brennpunkt  $O'$  angenommen werden kann, so dass  $S'$  die Form  $r'^2 - c'$  hat, während  $S = 0$  als Gleichung der berührenden Kugel  $\Gamma$  gewählt werden kann, so dass  $S = r^2 - \alpha$  mit  $\alpha > 0$  ist. Die Fläche  $\Phi$  hat dann eine Gleichung der Form

$$(10,5) \quad (c' - r'^2)^2 + 4b'^2(\alpha - r^2) = 0,$$

wo der Koeffizient des letzten Gliedes,  $4b'^2$ , positiv sein muss, da  $\Gamma$  ausserhalb von  $\Phi$  liegen soll.

Da nun die Tangenten von  $k$  die Kugel  $\Gamma$  (längs einer Evolvente von  $k$ ) berühren, gilt eine Relation

$$(10,6) \quad r^2 = \bar{s}^2 + \alpha,$$

wo  $s$  die Bogenlänge von  $k$ , von dem (eventuell imaginären) gemeinsamen Punkt von  $k$  und  $\Gamma$  aus gerechnet, bezeichnet. Aus (10,5) erhält man

$$(10,7) \quad r'^2 = \pm 2b'\bar{s} + c',$$

und aus den Gleichungen (10,6) und (10,7) folgt dann, dass  $k$  eine polyzykloidale Kurve ist.

Durch diesen Satz bekommt man einen gewissen Überblick über die polyzykloidalen Kurven auf einem Cartesischen Ovaloid  $\Phi$ . Auf  $\Phi$  gibt es der Wahl der berührenden Kugel entsprechend unendlich viele Scharen solcher Kurven. Betrachten wir die Rotationskongruenz der gemeinsamen Tangenten von  $\Phi$  und  $\Gamma$ , so sind die auf  $\Phi$  gelegenen Gratlinien der in der Kongruenz enthaltenen Torsen die polyzykloidalen Kurven.

Aus Satz 7,4 erhält man für die verschiedenen Scharen polyzykloidalen Kurven auf  $\Phi$  folgenden

**Satz 10,9.** *Die Parallelkreise von  $\Phi$  schneiden proportionale Bögen aus den auf  $\Phi$  liegenden polyzykloidalen Kurven aus.*

Für den Verlauf einer polyzykloidalen Kurve auf einem Cartesischen Ovaloid ergeben sich mehrere Möglichkeiten je nach der Anzahl der reellen Brennpunkte von  $\Phi$  (der Gestalt von  $\Phi$ ) und der gegenseitigen Lage von  $\Gamma$  und  $\Phi$ . Bei fester Fläche ergeben sich, je nachdem  $\Gamma$  die Fläche  $\Phi$  längs eines reellen Kreises, eines Nullkreises oder eines imaginären Kreises berührt, drei verschiedene Kurventypen. Der Verlauf der polykonischen Loxodromen ist in CESÀROS Arbeit [2] untersucht worden.

### § 11. Polyzykloidale Kurven auf einer Kugel.

Ist in den obigen Bezeichnungen  $a_1 \neq a_2$ , aber  $d = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ , soartet das Cartesische Ovaloid  $\Phi$  in eine Kugel aus. In Übereinstimmung mit Satz 9,3 kann der Koeffizient  $a$  in (9,6) alle Werte annehmen, also speziell die Werte 0 und 1, die den Punkten  $O'$  bzw.  $O''$  entsprechen mögen. An Stelle der Gleichungen (10,1) und (10,2) treten hier

$$(11,1) \quad r'^2 = \alpha'$$

$$(11,2) \quad r''^2 = \bar{s}^2 + \alpha'',$$

wo (11,1) die Gleichung der Kugel  $\Phi$  ist, während  $r''^2 = \alpha''$  die Gleichung der zu  $O''$  gehörenden Grundkugel ist, die wir hier mit  $\Psi$  bezeichnen wollen, und die von den Tangenten von  $k$  berührt wird. Die Tangenten einer polyzykloidalen Kurve auf einer Kugel sind also gemeinsame Tangenten von zwei Kugeln  $\Phi$  und  $\Psi$ . Umgekehrt ist eine Kurve  $k$  auf einer Kugel  $\Phi$  polyzykloidal, wenn die Tangenten von  $k$  eine andere Kugel  $\Psi$  berühren (vgl. Satz 10,8). Da nämlich die Berührungskurve  $k'$  der Tangenten mit  $\Psi$  Evolvente von  $k$  ist, gilt ausser (11,1) eine Gleichung der Form (11,2). Mit anderen Worten haben wir

**Satz 11,1.** *Die polyzykloidalen Kurven auf einer Kugel  $\Phi$  sind Geradenlinien von Torsen, die in der Kongruenz der gemeinsamen Tangenten von  $\Phi$  und einer zweiten Kugel  $\Psi$  enthalten sind.*

Diese Kurven sind schon früher im Zusammenhang mit einer solchen Geradenkongruenz untersucht worden (NYSTRÖM [1], [2], WUNDERLICH [5], [8]).

Wie in Satz 9,4 erwähnt, bilden die zu der Kurve  $k$  gehörenden Grundkugeln ein durch  $\Phi$  und  $\Psi$  bestimmtes Büschel. Den drei oben genannten Typen von polyzykloidalen Kurven auf einem gegebenen Cartesischen Ovaloid entsprechen auch hier drei Typen, je nachdem ob das Kugelbüschel hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch ist.

Ist das Büschel elliptisch, so gibt es zwei Nullkugeln, deren Mittelpunkte  $F_1$  und  $F_2$  die Doppelpunkte der Involution sind, die von dem Kugelbüschel auf der Achse ausgeschnitten wird. Die Kurve  $k$  ist dann eine polykonische Loxodrome, da sie

auf jedem der Kegel mit den Spitzen  $F_1$  und  $F_2$  Loxodrome ist. Ist das Büschel parabolisch, so ist  $k$  Loxodrome auf genau einem Kegel, nämlich dem Kegel durch  $k$  und mit dem gemeinsamen Berührungspunkt des Kugelbüschels als Scheitel. Dieser Kegel wird von einer auf der Achse senkrechten Ebene in einer zu  $k$  inversen Kurve, also in einer ebenen Kegelloxodrome, d. h. einer Parazykloide, geschnitten (s. S. 35). Der Kegel ist ein W-Kegel. Ist das Büschel hyperbolisch, so sind alle Grundkugeln reell, und  $k$  ist nicht Kegelloxodrome. — In jedem einzelnen Fall erhält man leicht eine Übersicht über die verschiedenen Abwicklungen von  $k$  von Punkten  $P$  der Achse aus (vgl. WUNDERLICH [5], S. 8).

Für die Evolventen von  $k$  gilt Satz 10,5 unverändert. Die Tangente  $p$  in einem Punkt  $P$  von  $k$  schneidet das Kugelbüschel in einer Involution, deren Doppelpunkte der Punkt  $P$  und der Berührungspunkt  $P'$  der Tangente mit  $\Psi$  sind. Diese Punkte sind mit den Schnittpunkten  $P_1$  und  $P_2$  von  $p$  und einer beliebigen Grundkugel harmonisch verbunden, also in bezug auf jede Grundkugel konjugiert. Im Gegensatz zum Fall der polyzykloidalen Kurven auf einem Cartesischen Ovaloid (S. 54) ist das auf  $p$  liegende ähnlich-veränderliche System von Punkten  $T$  für alle Grundkugeln dasselbe. Die verallgemeinerten Trochoiden sind hier sphärische Kurven. Zwei Punkte  $P_1$  und  $P_2$ , die mit  $P$  und  $P'$  harmonisch verbunden sind, durchlaufen Kurven auf derselben Grundkugel, und entsprechende Bogenlängen auf diesen Kurven sind nach Satz 8,1 proportional.

Ist das Kugelbüschel elliptisch, so sieht man die Strecke  $PP'$  von  $F_1$  oder  $F_2$  aus unter einem rechten Winkel und sämtliche Strecken  $P_1P_2$  unter konstantem Winkel<sup>1</sup>. Allgemeiner gilt, dass die ganze Figur, die aus einem Punkt  $F$  und den Punkten  $T$  auf der Tangente  $p$  besteht, ähnlich veränderlich ist.

Die Sätze 10,6, 10,7 und 10,9 können unmittelbar auf sphärische polyzykloidalen Kurven übertragen werden.

---

Ausser den polyzykloidalen Kurven ( $k$ ) auf  $\Phi$  und den Berührungskurven ( $k'$ ) ihrer Tangentenflächen mit  $\Psi$  wollen wir die polyzykloidalen Kurven ( $k^*$ ) auf  $\Psi$  betrachten, deren Tan-

<sup>1</sup> Vgl. WUNDERLICH [8], S. 4.

genten  $\Phi$  (längs der Kurven  $(k'^*)$ ) berühren. Alle vier Kurvenscharen sind Rotationsscharen und gehören zu Torsen, die in der Kongruenz der gemeinsamen Tangenten von  $\Phi$  und  $\Psi$  enthalten sind. Wie bekannt bilden  $(k)$  und  $(k'^*)$  auf  $\Phi$  sowie  $(k^*)$  und  $(k')$  auf  $\Psi$  konjugierte Scharen, also Orthogonalscharen. Da nun die Kurven  $(k)$  die Evoluten der Schar  $(k')$  und die Kurven  $(k'^*)$  die Evolventen der Schar  $(k^*)$  sind, hat man hier ein räumliches Analogon zu dem in Satz 2,3 formulierten Zusammenhang zwischen ebenen zyklroidalen Kurven und ihren orthogonalen Trajektorien.

Wir denken uns zwei in dieser Weise zusammengehörende Kurven  $k$  und  $k^*$  von demselben Punkt  $O$  auf der Achse aus abgewickelt und wollen den Zusammenhang zwischen diesen Abwicklungen ermitteln. Durch Anwendung von Formel (9,7) auf die Koeffizienten in (11,1) und (11,2) finden wir  $a = \lambda_2$  für den  $(\lambda_1, \lambda_2)$  entsprechenden Punkt  $O$ . Entsprechend ergibt sich (indem man  $O'$  und  $O''$  vertauscht)  $a^* = \lambda_1$  für die Kurve  $k^*$ . Also haben wir  $a + a^* = 1$  oder wegen (4,12)

$$\mu \cdot \mu^* = 1.$$

Die zu  $k$  und  $k^*$  gehörigen Grundkugeln sind identisch, nämlich mit derjenigen Kugel des Büschels, die den Mittelpunkt  $O$  hat. Ist also die Abwicklung von  $k$  eine zyklroidale Kurve  $(\mu, \alpha)$ , so ist die Abwicklung von  $k^*$  die Kurve  $(\mu^{-1}, \alpha)$ . Aus den Bemerkungen auf S. 11 ergibt sich, dass die Abwicklungen der einen der beiden Scharen  $(k)$  und  $(k^*)$  aus den Evoluten der orthogonalen Trajektorien der Abwicklungen der anderen Schar besteht. Wir haben also genau dieselbe Beziehung wie zwischen den Scharen  $(k)$  und  $(k^*)$  auf den Kugeln  $\Phi$  und  $\Psi$ ; diese Lageverhältnisse bleiben also bei zentraler Abwicklung von einem beliebigen Punkt der Achse aus unverändert.

Schliesslich erwähnen wir, dass zwischen den genannten Scharen von polyzyklroidalen Kurven und ihren orthogonalen Trajektorien viele geometrische Relationen bestehen. In diesem Zusammenhang verweisen wir auf Nyströms und Wunderlichs Abhandlungen. Der Verlauf dieser Kurven im Falle eines elliptischen Kugelbüschels geht aus der schönen Fig. 2 bei NYSTRÖM [2] hervor.

### § 12. Polyzykloide Böschungslinien.

Wir gehen nun zu dem dritten Fall auf S. 49 über, wo die (9,1) und (9,2) entsprechenden Relationen die Form

$$(12,1) \quad r_1^2 = as^2 + 2b_1s + c_1$$

$$(12,2) \quad r_2^2 = as^2 + 2b_2s + c_2$$

haben, und  $b_1 \neq b_2$  ( $d \neq 0$ ) ist.

Durch Subtraktion von (12,2) von (12,1) erhalten wir

$$(12,3) \quad qz = (b_1 - b_2)s + c;$$

die betrachtete polyzykloide Kurve  $k$  ist also eine Böschungslinie, deren Tangenten einen festen Winkel mit der  $Z$ -Achse bilden. Durch Elimination von  $s$  aus (12,1) und (12,3) ergibt sich die Gleichung der Rotationsfläche 2. Ordnung  $\Phi$ , auf der  $k$  liegt.

Umgekehrt ist jede Böschungslinie  $k$  auf einer Rotationsfläche 2. Ordnung, deren Tangenten einen festen Winkel  $u$  mit der Achse bilden, eine polyzykloide Kurve der hier betrachteten Art. Die Gleichung von  $\Phi$  sei von der Form

$$(12,4) \quad x^2 + y^2 = Az^2 + 2Bz + C,$$

wo  $A \neq -1$ . Da zwischen  $z$  und  $s$  eine Relation der Form

$$(12,5) \quad z = (s + c') \cos u$$

besteht, erhält man für den Abstand  $r$  des durch  $s$  bestimmten Kurvenpunktes  $P$  von  $(0, 0, 0)$

$$(12,6) \quad r^2 = (A + 1) \cos^2 u (s + c')^2 + 2B \cos u (s + c') + C.$$

Zusammen mit (12,5) zeigt dies, dass  $k$  polyzykloidal ist. Für den Abstand von  $P$  zu einem anderen Punkt der  $Z$ -Achse erhält man denselben Koeffizienten  $a$  von  $(s + c')^2$ . Zwischen  $a$ ,  $A$  und  $u$  besteht also die Gleichung

$$(12,7) \quad a = (A + 1) \cos^2 u.$$

Mit Berücksichtigung von Satz 9,3 haben wir also

**Satz 12,1.** *Die polyzykloidalen Raumkurven, deren zentrale Abwicklungen sämtlich denselben Modul haben, sind diejenigen Böschungslinien auf einer Rotationsfläche 2. Ordnung, deren Tangenten einen festen Winkel mit der Rotationsachse bilden.*

Diese Böschungslinien werden im folgenden polyzykloidalen Böschungslinien genannt. Eine solche Kurve ist offenbar durch den Winkel  $u$  und die Fläche  $\Phi$ , auf der sie liegt, bestimmt.

Die polyzykloidalen Böschungslinien sind in zahlreichen Arbeiten untersucht worden<sup>1</sup>. Von den vielen bekannten Resultaten erwähnen wir, dass die Projektion einer polyzykloidalen Böschungslinie auf eine zur Achse senkrechte Ebene eine ebene zyklonale Kurve ist. Bezeichnet nämlich  $s'$  die Bogenlänge auf der projizierten Kurve, so gilt die Gleichung  $s = s'/\sin u$ ; setzt man  $s$  in (12,5) und ferner  $z$  in (12,4) ein, so wird  $x^2 + y^2$  ein Polynom 2. Grades in  $s'$ . Ist die Fläche  $\Phi$  ein Paraboloid ( $A = 0$ ), so ist die projizierte Kurve eine Kreisevolvente. In den anderen Fällen kann man die  $XY$ -Ebene als Symmetrieebene von  $\Phi$  wählen ( $B = 0$ ) und auf diese Ebene projizieren. In diesem Fall ist der Grundkreis der Projektion der in der  $XY$ -Ebene gelegene reelle oder imaginäre Kehlkreis der Fläche  $\Phi$ .

Ferner gilt: Die genannten Böschungslinien sind die Darbouxkurven auf  $\Phi$ , die Planevolute einer polyzykloidalen Böschungslinie  $k$  ist wieder eine Kurve dieser Art, und der geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte von  $k$  liegt auf einer weiteren Fläche 2. Ordnung und wird auf eine zur Achse senkrechte Ebene in eine Trochoide projiziert (BLASCHKE [1]).

Wie in Satz 9,4 erwähnt besteht das System der zu  $k$  gehörenden Grundkugeln aus den  $\Phi$  längs der Parallelkreise (reell oder imaginär) berührenden Kugeln. Es sei nun  $\Gamma$  eine beliebige Grundkugel, die  $\Phi$  längs eines Kreises  $d$  berührt, dessen Ebene mit  $\delta$  bezeichnet werde. Der zu einem beliebigen Punkt  $P$  auf  $k$  in bezug auf  $\Gamma$  konjugierte Punkt  $P'$  auf der Tangente

<sup>1</sup> s. z. B. NUGEL [1], BLASCHKE [1], LORIA [2], JUEL [1] sowie die Arbeiten von WUNDERLICH.

$p$  in  $P$  liegt dann in der Ebene  $\delta$ . Die Tangentialebene an  $\Phi$  in  $P$  schneidet nämlich  $\Gamma$  in einem Kreis und  $\Phi$  in zwei Erzeugenden, die den Kreis in Punkten von  $d$  berühren, so dass also die Spur der Tangentialebene in  $\delta$  die Polare von  $P$  ist. Die von  $P'$  durchlaufene Evolvente (Satz 7,3) ist dann — wie alle Evolventen — eine ebene Kurve, die zugleich die Evolvente der Projektion von  $k$  auf  $\delta$  ist.

Kennt man die Grundkugelschar einer polyzyklidalen Kurve  $k$  auf der Fläche  $\Phi$ , also die Schar der doppelberührenden Kreise eines Kegelschnittes, so ist es nun leicht die zentralen Abwicklungen von  $k$  zu bestimmen. In allen Fällen erhält man eigentlich oder uneigentlich ähnliche zykloidale Kurven.

1) Entsteht  $\Phi$  durch Umdrehung eines Kegelschnittes um die Brennpunktsachse, ist es also ein verlängertes Rotationsellipsoid, ein zweischaliges Hyperboloid oder ein Paraboloid, so liegen sämtliche (reellen) Grundkugeln innerhalb der Fläche. Es gibt imaginäre Grundkugeln sowie Nullkugeln mit den Brennpunkten als Mittelpunkte. Die Abwicklungen von  $k$  sind dann uneigentliche zykloidale Kurven, und alle drei Typen kommen vor. In den ersten beiden Fällen ist  $k$  zugleich eine polykonische Loxodrome.

2) Ist  $\Phi$  ein einschaliges Hyperboloid (und der Winkel  $u$  grösser als der Winkel zwischen den Erzeugenden und der Achse), eine Zylinderfläche oder eine Kegelfläche, so sind die Grundkugeln reell, und die Tangenten an die Böschungslinie  $k$  schneiden diese Kugeln nicht. Die zentralen Abwicklungen sind dann Hyperzykloiden, mit Ausnahme des Falles der Kegelfläche, wo die Abwicklung vom Scheitel aus eine logarithmische Spirale ist.

3) Ist  $\Phi$  ein abgeplattetes Rotationsellipsoid oder ein einschaliges Hyperboloid (und der Winkel  $u$  kleiner als der Winkel zwischen den Erzeugenden und der Achse), so sind die Grundkugeln wieder reell, aber die Tangenten an  $k$  schneiden sie. Die Schnittpunkte der Tangente  $p$  in  $P$  auf  $k$  mit der Grundkugel  $\Gamma$  seien  $P_1$  und  $P_2$ ; dann ist das Verhältnis  $f = PP_1/PP_2$  konstant, also unabhängig von der gewählten Grundkugel (da  $\mu$  konstant ist). Die Zahl  $f$  ist negativ für das Ellipsoid und positiv für das Hyperboloid; die Abwicklungen von  $k$  sind also in diesen beiden Fällen Epizykloiden, bzw. Hypo-

zykloiden. Wir bemerken, dass die oben genannten Projektionen von  $k$  ebenfalls Epi- bzw. Hypozykloiden sind.

In den ersten beiden Fällen kommen unter den Abwicklungen von  $k$  Hyperzykloiden vor. Für diese Kurven gilt daher Satz 8,2, der sich jedoch hier vereinfacht, da das Binormalenbild einer Böschungslinie bekanntlich ein Kreis ist. Im Gegensatz zu den Verhältnissen bei polyzykloidalen Raumkurven auf einem Cartesischen Ovaloid (Satz 10,4) ist hier der Winkel, unter dem  $k$  die Erzeugenden der unendlich vielen Torsen schneidet, konstant; die Erzeugenden dieser Torsen gehören also zu einer Geradenkongruenz, die von kongruenten Rotationskegeln erzeugt wird, deren Scheitel auf  $k$  liegen und deren Achsen die betreffenden Tangenten von  $k$  sind.

Wir wenden uns nun dem letzten Fall zu, wobei wir die von  $P_1$  und  $P_2$  durchlaufenen sphärischen Kurven näher untersuchen wollen, die sich als sogenannte »korrespondierende« Trochoiden (speziell Zykloiden) herausstellen werden.

Der Verlauf einer polyzykloidalen Böschungslinie  $k$  auf der zugehörigen Fläche ist in allen Fällen bekannt (da man die Projektion von  $k$  auf eine zur Achse senkrechte Ebene kennt). In den Fällen, die wir nun betrachten werden, verläuft  $k$  auf einer Zone der Fläche, die von zwei Parallelkreisen  $h_1$  und  $h_2$  begrenzt wird (die in den zu der Projektion von  $k$  gehörigen Kreis  $h$  projiziert werden). In einem Punkt dieser Kreise hat  $k$  eine Spitze, deren Tangente in der Meridianebene liegt und mit der Achse den Winkel  $u$  bildet. Jede Böschungslinie besteht aus einer Reihe monotoner Raumkurven, die abwechselnd auf den Grenzkreisen  $h_1$  und  $h_2$  in Spitzen zusammenstossen.

Es seien nun eine Kugel  $T$  mit dem Mittelpunkt auf der  $Z$ -Achse (die vertikal angenommen werde), und auf dieser Kugel ein Kreis  $c$  in einer horizontalen Ebene  $\gamma$  gegeben. Wir nehmen an, dass zwei auf  $T$  gelegene kongruente Kreise  $c_1$  und  $c_2$  auf  $c$  so rollen, dass sie auf verschiedenen Seiten von  $c$  liegen und gemeinsamen Berührungspunkt mit  $c$  haben. Sie liegen dann in jedem Augenblick symmetrisch zu der sie im gemeinsamen Punkt berührenden Diametralebene  $\pi$  von  $T$ . Wir denken uns nun mit dem Kreis  $c_1$  einen Punkt  $P_1$  von  $T$  starr verbunden. Der in bezug auf  $\pi$  symmetrische Punkt  $P_2$  ist dann starr mit

$c_2$  verbunden. Wenn nun  $c_1$  und  $c_2$  gleichzeitig auf  $c$  rollen, beschreiben  $P_1$  und  $P_2$  i. a. sphärische Trochoiden, die als korrespondierend bezeichnet werden sollen. Liegt  $P_1$  auf  $c_1$  (also  $P_2$  auf  $c_2$ ), so erhält man korrespondierende sphärische Zykloiden, die Spitzen in denselben Punkten von  $c$  haben.

Bei einer analogen Rollbewegung in der Ebene hüllt die Verbindungsgerade  $P_1P_2$  von zwei zusammengehörigen Punkten auf den beiden Trochoiden bekanntlich eine Hypozykloide ein. Wir wollen nun beweisen, dass die Gerade  $P_1P_2$  bei korrespondierenden sphärischen Trochoiden  $\tau_1$  und  $\tau_2$  eine Torse, nämlich die Tangentenfläche einer polyzykloidalen Böschungslinie, beschreibt.<sup>1</sup>

Da  $P_1$  und  $P_2$  in jedem Augenblick symmetrisch zu der Ebene  $\pi$  liegen und die momentane Drehachse in dieser Ebene liegt, müssen auch die Tangenten an  $\tau_1$  in  $P_1$  und an  $\tau_2$  in  $P_2$  zu  $\pi$  symmetrisch sein, und die Gerade  $p$  ( $= P_1P_2$ ) erzeugt also eine Torse. Da  $p$  ferner auf  $\pi$  senkrecht steht und  $\pi$  mit der  $Z$ -Achse einen konstanten Winkel bildet, ist auch der Winkel zwischen  $p$  und der  $Z$ -Achse konstant, d. h. die Gratlinie  $k$  der Torse ist eine Böschungslinie. Beim Abrollen von  $c_1$  und  $c_2$  haben die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  offenbar proportionale Geschwindigkeiten, und  $k$  ist also eine zykloidale Raumkurve mit  $\Gamma$  als Grundkugel (vgl. die Bemerkungen auf S. 41). Es gelten also Gleichungen der Form (12,5) und (12,1), d. h.  $k$  ist eine polyzykloidale Böschungslinie.

Hiermit ist der HJELMSLEVSche Satz bewiesen. Um die Art der Kurve  $k$  näher zu untersuchen, denken wir uns die Kreise  $c_1$  und  $c_2$  in einer beliebigen Stellung um die gemeinsame Tangente so in die Ebene  $\gamma$  gedreht, dass sie auf verschiedenen Seiten der Tangente zu liegen kommen. Die Verbindungsgerade der mit  $c_1$  und  $c_2$  in die Ebene gedrehten Punkte  $P_1$  und  $P_2$  ist dann die Projektion  $p'$  der Geraden  $p$  auf  $\gamma$ ; die Kurve — wie oben erwähnt eine Hypozykloide — die von diesen Geraden eingehüllt wird, ist also die Projektion von  $k$  auf  $\gamma$ . Die Kurve  $k$  liegt also auf einem einschaligen Rotationshyperboloid  $\Phi$  mit der  $Z$ -Achse als Achse. Dieses Resultat hängt natürlich damit zusammen, dass der Berührungspunkt  $P$  auf  $p$  ausserhalb der Strecke  $P_1P_2$  liegt (das Verhältnis  $f = PP_1/PP_2$  ist positiv),

<sup>1</sup> Dieser Satz findet sich in J. HJELMSLEVS Manuskripten.

da die Kreise  $c_1$  und  $c_2$  auf verschiedenen Seiten von  $c$  liegen.

Die Kugel  $I$ , die eine Grundkugel ist, berührt  $\Phi$  längs eines Kreises  $d$  (in der Ebene  $\delta$ ). Wie oben bemerkt enthält diese Ebene bei jeder Lage von  $p$  den zu  $P$  in bezug auf  $I$  konjugierten Punkt  $P'$ , und es ist  $P'P_1/P'P_2 = -f$ .

Umgekehrt werden wir nun zeigen, dass die Tangentenfläche einer polyzykloidalen Böschungslinie  $k$  auf einem einschaligen Rotationshyperboloid  $\Phi$ , deren zentrale Abwicklungen Hypozykloiden sind, jede der Grundkugeln in korrespondierenden Trochoiden (speziell Zykloiden) schneidet.

Die  $Z$ -Achse sei wieder die Rotationsachse von  $\Phi$ . Die  $YZ$ -Ebene schneide  $\Phi$  in der Hyperbel  $\varphi$  und die Grundkugel  $I$  im Kreise  $\psi$ . Der Berührungskreis  $d$  von  $\Phi$  und  $I$  liegt in einer Ebene  $\delta$ , deren Spur in der  $YZ$ -Ebene mit  $d'$  bezeichnet werde. Die beiden zu  $k$  gehörigen Grenzkreise seien wie oben  $h_1$  und  $h_2$ .

Wir wählen zunächst auf  $I$  denjenigen horizontalen Kreis  $c$  mit dem sphärischen Radius  $90^\circ - u$ , der auf derselben Halbkugel liegt wie der Kreis  $d$ ; die Ebene des Kreises werde mit  $\gamma$  bezeichnet, ihre Spur in der  $YZ$ -Ebene mit  $c'$ . Einer der Schnittpunkte von  $c'$  und  $\psi$  heiße  $R$  und die Verlängerung des Radius  $OR$  schneide  $d'$  in einem Punkt  $S$  (vgl. Fig. 7, die den Fall zeigt, wo der Kreis  $d$  ausserhalb der von  $h_1$  und  $h_2$  begrenzten Zone von  $\Phi$  liegt).

Wir betrachten nun die beiden diametralen Punkte  $A$  und  $B$  von  $\varphi$ , in denen die Tangenten an  $\varphi$  auf der Geraden  $ORS$  senkrecht stehen, von denen folglich einer auf  $h_1$ , der andere auf  $h_2$  liegt. Die erwähnten Tangenten mögen  $\psi$  in den Punkten  $A_1, A_2$  bzw.  $B_1, B_2$  und  $d'$  in den Punkten  $A'$  und  $B'$  schneiden.  $A$  und  $B$  liegen entweder auf derselben Böschungslinie  $k$  oder auf Böschungslinien, die aus einander durch Drehung um die  $Z$ -Achse hervorgehen und also dieselbe Grundkugel  $I$  haben. Daher ist  $AA_1/AA_2 = BB_1/BB_2 (= f)$  und daher  $A'A_1/A'A_2 = B'B_2/B'B_1 = -f$ , woraus sich ergibt, dass die Geraden  $A_1B_1, A_2B_2$  und  $A'B'$  durch denselben Punkt, nämlich  $S$ , gehen. Auch  $AB$  geht durch  $S$ .

Wir konstruieren nun auf  $I$  eine Trochoide in der folgenden Weise: Der Kreis  $c$  sei der feste Kreis. Der Mittelpunkt des

rollenden Kreises  $c_1$  sei der Mittelpunkt  $O_1$  des Bogens  $A_1B_1$ , und der sphärische Radius von  $c_1$  sei  $O_1R$ . Da  $O_1$  als Mittelpunkt des Bogens  $A_1B_1$  offenbar auf derselben Seite der  $Z$ -Achse liegt wie  $R$ , hat  $c_1$  einen kleineren sphärischen Radius als  $c$ , kann also innerhalb  $c$  rollen. Schliesslich sei der mit  $c_1$  verbundene Punkt  $P_1$  in der Ausgangsstellung der Punkt  $A_1$ . Hierdurch ist

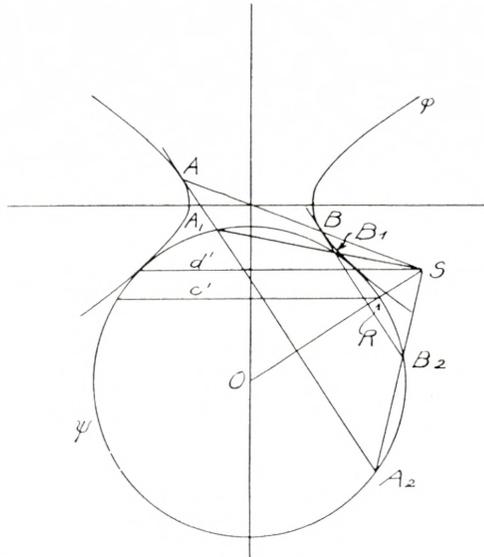


Fig. 7.

eine Trochoide  $\tau_1$  und gleichzeitig die korrespondierende Trochoide  $\tau_2$  festgelegt. Es muss nun gezeigt werden, dass die Verbindungsgerade korrespondierender Punkte eine mit  $k$  kongruente polyzykloidale Böschungslinie einhüllt.

Wir bezeichnen die durch  $\tau_1$  und  $\tau_2$  bestimmte Böschungslinie mit  $\bar{k}$ , den zugehörigen Winkel mit  $\bar{u}$  und das zugehörige Hyperboloid mit  $\bar{\Phi}$ . Wir haben zu zeigen, dass  $\bar{u} = u$  und dass  $\bar{\Phi}$  und  $\Phi$  zusammenfallen.

Dass  $\bar{u} = u$ , ist unmittelbar klar. Wir bemerken, dass auf der Geraden  $A_1A_2$  ein Punkt  $\bar{A}$  von  $\bar{k}$  liegen muss; der mit  $\bar{A}$  in bezug auf  $I'$  konjugierte Punkt sei  $\bar{A}'$ . Da  $B_1$  und  $B_2$  als zusammengehörige in die  $YZ$ -Ebene gedrehte Scheitel von  $\tau_1$  und  $\tau_2$  aufgefasst werden können, gibt es auf  $B_1B_2$  einen Punkt  $\bar{B}$ , der durch die Drehung aus einem Berührungspunkt mit  $\bar{k}$  hervorgeht. Der zu  $\bar{B}$  konjugierte Punkt sei  $\bar{B}'$ . Die Punkte  $A'$  und  $B'$  müssen

aber auf derselben horizontalen Geraden  $\bar{d}'$  liegen, und es muss  $\bar{A}'A_1/\bar{A}'A_2 = \bar{B}'B_1/\bar{B}'B_2 = -\bar{f}$  sein, wo  $\bar{f}$  die zu  $\bar{k}$  gehörende Konstante ist. Hieraus folgt, dass die Gerade  $\bar{d}'$  ebenfalls durch den Punkt  $S$  geht, so dass  $\bar{d}'$  und  $d'$  zusammenfallen. Folglich ist  $\bar{f} = f$  und  $\bar{A}$  bzw.  $\bar{B}$  fallen in  $A$  bzw.  $B$ . Die Meridianhyperbel  $\bar{\varphi}$  von  $\bar{\Phi}$  berührt dann ebenso wie  $\varphi$  die Gerade  $AA_1A_2$  in  $A$ , die Gerade  $BB_1B_2$  in  $B$  sowie den Kreis  $\psi$  in den Schnittpunkten mit der Geraden  $d'$ , d. h.  $\bar{\varphi}$  und  $\varphi$  und damit auch  $\bar{\Phi}$  und  $\Phi$  fallen zusammen.

Hiermit ist gezeigt, dass die Kurven  $\bar{k}$  und  $k$  kongruent sind, und der genannte Satz ist bewiesen.

Die Art der erzeugten korrespondierenden Trochoiden hängt von der relativen Lage der Grundkugel  $T$  und der Fläche  $\Phi$  ab. Der Punkt  $P_1$  liegt innerhalb  $c_1$ , auf  $c_1$  oder ausserhalb  $c_1$ , je nachdem der Berührungskreis  $d$  ausserhalb der von  $h_1$  und  $h_2$  begrenzten Zone von  $\Phi$  liegt, mit  $h_1$  oder  $h_2$  zusammenfällt oder innerhalb dieser Zone liegt.

Die obigen Betrachtungen können ohne Schwierigkeit auf die polyzyklidalen Böschungslinien auf einem abgeplatteten Ellipsoid übertragen werden. Die korrespondierenden Trochoiden werden in diesem Fall von Punkten erzeugt, die mit Kreisen  $c_1$  und  $c_2$ , die grösser als der feste Kreis  $c$  sind, starr verbunden sind. Diese Kreise müssen hier auf derselben von  $c$  begrenzten Kugelkalotte (aber wieder symmetrisch zu der berührenden Diametralebene  $\pi$ ) liegen. Man erhält also zusammenfassend das folgende Resultat:

**Satz 12,1.** *Die Tangentenfläche einer polyzyklidalen Böschungslinie, deren zentrale Abwicklung eine Hypo- oder Epizykloide ist und die auf einem einschaligen Rotationshyperboloid oder einem abgeplatteten Rotationsellipsoid liegt, schneidet jede der Kugeln, die die Fläche in einem Kreis berühren, in korrespondierenden (sphärischen) Trochoiden. Berührt die Kugel die Fläche speziell längs einer der Grenzkreise der Böschungslinien, so entstehen korrespondierende sphärische Zykloiden.*

Wir bemerken, dass der HJELMSLEVSche Satz (S. 64) in den Fällen, wo z. B. die Kreise  $c$ ,  $c_1$  und  $c_2$  gleich gross sind oder wo  $c$  (oder  $c_1$ ) ein Grosskreis ist, zu besonderen Untersuchungen Anlass gibt.

### § 13. Ebene zyklonale Kurven als Spezialfälle polyzyklonaler Raumkurven.

Wir wenden uns nun dem letzten auf S. 49 betrachteten Fall zu. Die polyzyklonale Kurve  $k$  befriedigt Relationen der Form (12,1) und (12,2) mit  $b_1 = b_2$ , also  $d = 0$ . Die Gleichung (12,3) stellt dann eine Ebene dar, in der  $k$  liegt; wählt man das Zentrum der zentralen Abwicklung in dieser Ebene, so sieht man unmittelbar, dass  $k$  eine ebene zyklonale Kurve ist.

Ist umgekehrt eine ebene zyklonale Kurve in der  $XY$ -Ebene durch

$$(13,1) \quad x^2 + y^2 = a(s + c')^2 + \alpha$$

gegeben, so gilt für den Abstand  $r$  eines beliebigen Kurvenpunktes vom Punkte  $O(0,0,p)$  der  $Z$ -Achse

$$(13,2) \quad r^2 = a(s + c')^2 + (\alpha + p^2),$$

d. h. die zentrale Abwicklung von  $O$  aus ist wieder eine zyklonale Kurve.

Jede ebene zyklonale Kurve  $k$  kann also als polyzyklonale »Raumkurve« aufgefasst werden und ist das einfachste Beispiel einer solchen. Sämtliche zentralen Abwicklungen haben denselben Modul, und einem Scheitel von  $k$  entsprechen Scheitel der abgewickelten Kurven (S. 50–51). Das System der Grundkugeln ist offenbar dasjenige Kugelbüschel, dessen gemeinsamer Kreis der zu  $k$  gehörige Grundkreis  $g$  ist.

Ist  $k$  eine eigentliche Zyklone (hyperbolisches Kugelbüschel), so sind die zentralen Abwicklungen wieder eigentliche  $k$  ähnliche Zyklonen. Ist  $k$  eine Hyperzyklone oder eine logarithmische Spirale (hyperbolisches bzw. parabolisches Kugelbüschel), so sind die Abwicklungen ähnliche Hyperzyklonen<sup>1</sup>. Ist  $k$  dagegen eine Parazyklone (elliptisches Kugelbüschel), so erhält man alle Typen von uneigentlichen Zyklonen. Zu dem Kugelbüschel gehören zwei Nullkugeln mit den Mittelpunkten  $(0, 0, \sqrt{-\alpha})$  und  $(0, 0, -\sqrt{-\alpha})$ ; die Parazyklone ist somit das einfachste Beispiel einer polykonischen Loxodrome (vgl. S. 35).

<sup>1</sup> Vgl. C. JUEL, Interméd. d. Math. Bd. 2, S. 160.

Es sei nun  $k$  eine beliebige uneigentliche, so in der  $XY$ -Ebene gelegene Zykloide, dass der Mittelpunkt des zugehörigen Grundkreises der Punkt  $(0, 0, 0)$  ist. Ferner sei  $O$  der Mittelpunkt einer reellen Kugel  $\Gamma$  durch  $g$ . Dann gilt Satz 8,2. Da das Binormalenbild der ebenen Kurve  $k$  auf  $\Gamma$  einer der Punkte  $A, B$  ist, die  $\Gamma$  mit der  $Z$ -Achse gemeinsam hat, ist die Berührungskurve der Kugel  $\Gamma$  mit der ihr umschriebenen, durch  $k$  gehenden Torse  $\Sigma$  eine sphärische Loxodrome  $\varkappa$ . Der zu der Loxodrome  $\varkappa$  und der isogonalen Trajektorie  $k$  gehörige Winkel  $v$  ist unabhängig von der gewählten Grundkugel und bestimmt sich aus  $\cos^2 v = a$ . Jede zur  $XY$ -Ebene parallele Ebene wird von  $\Sigma$  in einer zyklidalen Kurve geschnitten, die denselben Modul wie  $k$  hat und deren Grundkreis der Schnittkreis der Ebene mit  $\Gamma$  ist. Es gilt also

**Satz 13,1.** *Eine Torse  $\Sigma$ , die einer Kugel  $\Gamma$  längs einer Loxodrome  $\varkappa$  mit den Polen  $A$  und  $B$  umschrieben ist, wird von den auf  $AB$  senkrechten Ebenen  $\gamma$  in uneigentlichen Zykloiden mit demselben Modul geschnitten. Diese Kurven sind isogonale Trajektorien der Torse. Eine solche Schnittkurve ist Hyperzykloide, logarithmische Spirale oder Parazykloide, je nachdem  $\gamma$  die Kugel  $\Gamma$  schneidet, berührt oder nicht trifft<sup>1</sup>.*

Die Gratlinie  $\lambda$  der Torse hat als Schmiegeebenen die Tangentialebenen  $(p, R)$  (s. Fig. 6, S. 42) der Torse und daher als Binormalenbild auf  $\Gamma$  die Kurve  $\varkappa$ . Das Tangentenbild der Gratlinie ist also die polare Kurve, d. h. eine Traktrix (S. 35), und der zugehörige Richtungskegel ist daher ein  $W$ -Kegel.

Die Zentralprojektion von  $\lambda$  auf die Kugel ist die Evolute der Loxodrome  $\varkappa$ ; da nun der zu  $R$  gehörige sphärische Krümmungsmittelpunkt von  $\varkappa$  der Schnittpunkt der sphärischen Normalen von  $\varkappa$  in  $R$  und der Normalen des Grosskreises  $AR$  in  $A$  ist, findet man den auf der Geraden  $PR$  gelegenen Punkt  $G$  von  $\lambda$ , indem man mit der zu  $p$  parallelen Geraden durch den Schnittpunkt  $S$  von  $RM$  mit der Achse  $AB$  schneidet (Fig. 6). Da  $GS/GR = \cos v$ , ergibt sich z. B. durch Einführung von rechtwinkligen Koordinaten, dass  $G$  und damit auch  $\lambda$  auf einem zweischaligen Rotationshyperboloid mit den Scheiteln  $A$  und  $B$  liegt, dessen Asymptotenkegel den halben Scheitelwinkel  $90^\circ - v$  hat.

<sup>1</sup> Dieser Satz findet sich in J. HJELMSLEVS Manuskripten.

Die Gratlinie windet sich unendlich oft um dieses Hyperboloid herum und hat  $A$  und  $B$  als Asymptotenpunkte. Sie ist dadurch charakterisiert, dass der Winkel zwischen der Tangente in einem Punkt  $G$  und dem Radius  $SG$  des Parallelkreises konstant gleich  $v$  ist.

Die Tangente  $t$  an  $\varkappa$  im Punkte  $R$  schneidet  $p$  in einem Punkt  $P'$ , der zu  $P$  in bezug auf  $I$  und in bezug auf den Grundkreis  $g$  konjugiert ist. Hieraus folgt

**Satz 13,2.** *Die Tangentenfläche  $A$  von  $\varkappa$  schneidet jede der oben genannten Ebenen  $\gamma$  in der zyklidalen Evolvente der Kurve, in der  $\gamma$  von der Torse  $\Sigma$  geschnitten wird.*

Jede Gerade  $l$  in der Ebene  $(p, R)$ , die durch  $R$  geht und einen festen Winkel mit  $t$  (oder  $RM$  oder  $RP$ ) bildet, schneidet  $p$  in einem Punkte  $T$  derart, dass  $MT/MP$  konstant ist. Der Punkt  $P$  beschreibt dann eine Trochoide (S. 12). Allgemeiner schneidet jede Gerade (Ebene) durch  $R$  die mit den genannten Geraden fest verbunden ist, die  $XY$ -Ebene in einem (variablen) Punkt (einer Geraden), der (die) zu dem durch die Kurve  $k$  und die Evolvente  $k'$  bestimmten ähnlich veränderlichen System gehört. Man erhält so eine räumliche Erzeugung dieses Systems, die zum Beweis der in § 3 aufgestellten Sätze benutzt werden kann (jedoch nur, wenn  $k$  und  $k'$  uneigentliche Zykloiden sind)<sup>1</sup>.

Da die Schmiegeebenen der Loxodrome  $\varkappa$  offenbar die Polarebenen der Punkte der Gratlinie  $\lambda$  in bezug auf  $I$  sind, berühren diese Ebenen die Polarfläche des oben erwähnten Hyperboloids in bezug auf  $I$ , d. h. ein zweites zweischaliges Hyperboloid mit den Scheiteln  $A$  und  $B$ , dessen Asymptotenkegel den halben Scheitelwinkel  $v$  hat.

Schliesslich sei folgendes erwähnt. Dreht man die Loxodrome  $\varkappa$  um  $AB$  und nimmt dabei die Flächen  $\Sigma$  und  $A$  mit, so schneiden diese die  $XY$ -Ebene in zwei Rotationsscharen von zyklidalen Kurven, von denen die eine die Evolutenschar der anderen ist. Die zur Schar ( $\varkappa$ ) von Loxodromen gehörige Orthogonalschar auf  $I$  besteht ebenfalls aus Loxodromen, die dem Winkel  $90^\circ - v$  entsprechen. Dazu gehört wieder eine Schar von Flächen  $\Sigma_1$  und  $A_1$ , die die  $XY$ -Ebene in weiteren Scharen von

<sup>1</sup> Von anderen Gesichtspunkten aus findet man eine ähnliche Darstellung bei WUNDERLICH [1].

Pseudozykloiden schneiden, wobei die eine Schar Evolutenschar der anderen ist. Diese vier Scharen von zyklroidalen Kurven haben genau die in Satz 2,3 (S. 12) angegebenen gegenseitige Lage. Berührt die Kugel  $T$  speziell die  $XY$ -Ebene, so dass  $k$  eine logarithmische Spirale ist, so sind sämtliche Kurven dieser vier Scharen logarithmische Spiralen.

#### § 14. Die der Kreisevolvente und der gemeinen Zykloide entsprechenden polyzykloidalen Raumkurven.

In den vier letzten Paragraphen haben wir die auf S. 49 genannten vier Haupttypen von polyzykloidalen Kurven untersucht, für die Relationen (9,1) und (9,2) gelten, in denen die Koeffizienten  $a_1$  und  $a_2$  von  $s^2$  nicht beide verschwinden.

Wir nehmen nun im folgenden  $a_1 = a_2 = 0$  an. Zu den Punkten  $O_1$  und  $O_2$  gehören dann Relationen der Form

$$(14,1) \quad r_1^2 = 2 b_1 s + c_1$$

$$(14,2) \quad r_2^2 = 2 b_2 s + c_2,$$

so dass die entsprechenden zentralen Abwicklungen im allgemeinen Kreisevolventen sind. In einer anderen Abhandlung<sup>1</sup> habe ich eine detaillierte Diskussion dieses Falles durchgeführt. Während ich im übrigen darauf verweise, will ich hier nur bemerken, dass man unmittelbar einsieht, dass eine (14,1) und (14,2) genügende Raumkurve  $k$  auf einer Kugel oder in einer Ebene liegt, je nachdem  $b_1 \neq b_2$  oder  $b_1 = b_2$  ist. Im ersten Fall ist  $k$  eine sphärische Kreisevolvente, da sie eine Böschungslinie auf der Kugel ist (vgl. S. 60 für  $A = -1$ ). Im zweiten Fall ist  $k$  eine ebene Kreisevolvente. Im ersten Fall sind alle zentralen Abwicklungen unter einander ähnliche, im zweiten Fall unter einander kongruente Kreisevolventen.

Bei der allgemeinen Untersuchung der polyzykloidalen Raumkurven haben wir gesehen, dass bei Wahl der  $Z$ -Achse als Achse eine Gleichung der Form (9,10) oder

$$(14,3) \quad z = as^2 + 2bs + c$$

<sup>1</sup> FABRICIUS-BJERRE [2].

gilt, was ja der Tatsache entspricht, dass die Raumkurve  $k$  bei der »zentralen« Abwicklung der durch  $k$  gehenden Zylinderfläche mit zur  $Z$ -Achse parallelen Erzeugenden in eine gemeine Zykloide abgewickelt wird.

Wir wollen nun den Fall betrachten, wo es zwei Zylinderflächen durch  $k$  gibt, bei deren Abwicklung  $k$  in gemeine Zykloiden übergeführt wird. Die »Achse«  $O_1O_2$  ist hier die unendlich ferne Gerade. Es seien die Erzeugenden der einen Zylinderfläche mit der  $Z$ -Achse parallel, die Erzeugenden der anderen mit einer Geraden in der  $YZ$ -Ebene mit den Richtungs-cosinus  $(0, \cos v, \sin v)$ . Dann gilt neben (14,3) eine Gleichung der Form

$$(14,4) \quad y \cos v + z \sin v = a_1 s^2 + 2 b_1 s + c_1.$$

Die Variable  $y$  kann dann als Polynom zweiten oder speziell ersten Grades in  $s$  ausgedrückt werden, und  $k$  wird dem entsprechend in eine Zykloide oder eine Gerade abgewickelt.

Im ersten Fall gibt es eine andere Richtung in der  $YZ$ -Ebene, derart dass der (14,4) entsprechende Ausdruck in  $s$  linear wird, während man für alle anderen Richtungen Polynome zweiten Grades erhält. Den allgemeinen Fall erhält man dann, wenn man (14,3) mit dem Ausdruck

$$(14,5) \quad y = (s + c') \cos u$$

kombiniert, indem man die  $Y$ -Achse als die ausgezeichnete Richtung wählt (und danach die  $Z$ -Achse passend ändert).

Die Raumkurve  $k$  ist dann polyzykloidale Böschungslinie, und aus (14,3) und (14,5) ersieht man, dass  $k$  auf einer parabolischen Zylinderfläche  $\Phi$  liegt, deren Erzeugenden der  $X$ -Achse parallel sind und deren Symmetrieebene der  $XZ$ -Ebene parallel ist. Die Tangenten an  $k$  bilden dann einen festen Winkel  $(90^\circ - u)$  mit der Symmetrieebene der Fläche.

Liegt umgekehrt auf dem parabolischen Zylinder

$$(14,6) \quad pz = y^2$$

eine Böschungslinie, deren Tangenten mit der Symmetrieebene der Fläche einen festen Winkel bilden, so muss neben (14,6)

eine Gleichung der Form (14,5) und damit eine Gleichung der Form (14,3) gelten. Bei Abwicklung einer Zylinderfläche durch  $k$ , deren Erzeugendenrichtung der  $YZ$ -Ebene, aber nicht der  $Y$ -Achse parallel ist, geht  $k$  in eine gemeine Zykloide über.

**Satz 14,1.** *Liegt eine polyzykloide Böschungslinie  $k$  auf einer parabolischen Zylinderfläche, derart dass ihre Tangenten einen festen Winkel mit der Symmetrieebene der Fläche bilden, so wird die Kurve bei Abwicklung einer jeden Zylinderfläche durch sie, deren Erzeugenden auf den Erzeugenden des parabolischen Zylinders, aber nicht auf seiner Symmetrieebene, senkrecht stehen, in eine gemeine Zykloide übergeführt.*

Entsprechend dem auf S. 61 genannten Satz über die rechtwinklige Projektion einer polyzykloidalen Böschungslinie gilt hier, dass die Projektion von  $k$  auf die genannte Symmetrieebene eine gemeine Zykloide ist. Man sieht dies unmittelbar, wenn man in (14,5) den Wert  $s = s'/\sin u$  einsetzt und  $y$  aus (14,5) und (14,6) eliminiert.

---

### Literaturverzeichnis.

- [1] BLASCHKE, W., Bemerkungen über allgemeine Schraubelinien, Monatsh. f. Math. u. Phys., B. 19 (1908), S. 188.
- [1] CESÀRO, E., Vorlesungen über natürliche Geometrie, Leipzig 1901.
- [2] — Analisi intrinseca delle eliche policoniche, Rend. Acad. Napoli, 3. Serie, B. 9 (1903), S. 73.
- [1] FABRICIUS-BJERRE, FR., Über projektive Böschungslinien auf Flächen 2. Ordnung, Dan. Mat. Fys. Medd. **25**, no. 17 (1950).
- [2] — Om cirkelafvikleren og analoge rumkurver, Mat. Tidsskr. B, (1950), S. 10.
- [3] — The Osculating Conics of Steiner's Hypocycloid, Elemente der Math., B. 6 (1951).
- [4] — On the Osculating Conics of the Cycloids, Mat. Tidsskr. B, (1951), S. 30.
- [1] JUEL, C., Den cykloidske Vindellinie, Ber. 7 skand. Mat. kongres, Oslo (1930), S. 192.
- [1] LORIA, G., Spezielle alg. und transzendente ebene Kurven, Leipzig u. Berlin 1910, B. I u. II.
- [2] — Curve sghembe speciali, Bologna 1925, B. I u. II.
- [1] NUGEL, F., Die Schraubelinien, Diss. Halle a. S. (1912).
- [1] NYSTRÖM, E. J., Die gemeinsame Tangenten zweier Kugeln als Strahlenkongruenz betrachtet. Soc. sc. Fenn., Comm. phys.-mat., B. VII,3 (1933).
- [2] — Die Umhüllungstorsen zweier Kugeln, ebenda, IX,7 (1936).
- [1] WIELEITNER, H., Spezielle ebene Kurven, Leipzig 1908.
- [1] WUNDERLICH, W., Darstellende Geometrie nichteucl. Schraubflächen, Mh. f. Mat. u. Phys., B. 44 (1936), S. 249.
- [2] — Die isoptischen Kurven der Zykloiden, Zeitschr. f. ang. Mat. u. Mech., B. 17 (1937), S. 56.
- [3] — Über die Böschungslinien auf Flächen 2. Ordnung, Sitzber. Akad. Wien, Mat.-nat. Kl., B. 155 (1947), S. 309.
- [4] — Über die Schleppkurven des Kreises, ebenda, B. 156 (1948), S. 155.
- [5] — Über die Torsen, deren Erzeugenden zwei Kugeln berühren, Soc. sc. Fenn., Comm. phys.-mat., B. XIV,10 (1949).
- [6] — Über die polykonischen Loxodrome, Ann. di. Mat., Ser. IV, B. 39 (1949), S. 177.

- [7] WUNDERLICH, W. Über die Nyströmsche Strahlkongruenz und die geodätische Linien der Flächen 2. Grades, Soc. sc. Fenn., Comm. phys.-mat., B. XV,11 (1950).
- [8] — Pseudogeodätischen Linien auf Zylinderflächen, Sitz.ber. Akad. Wien, Mat.-nat. Kl., B. 158 (1950), S. 61.
- [9] — Pseudogeodätische Linien auf Kegelflächen, ebenda, S. 74.
- [10] — Raumkurven, die pseudogeodätische Linien zweier Kegel sind, Mh. f. Math., B. 54 (1950), S. 55.
- [11] — Raumkurven, die pseudogeodätische Linien eines Zylinders und eines Kegels sind, Comp. math., B. 8 (1950), S. 169.
- [1] WÖLFFING, E., Über Pseudotrochoiden, Zeitschr. f. Mat. u. Phys., B. 44 (1899), S. 139.
- [2] — Bericht über den gegenwärtigen Stand der Lehre von den cyklischen Kurven, Bibl. Math. 3, Folge 2 (1901), S. 235.
-

